KAHLER-EİNSTEİN METRİK ÜZERİNE

Cemile YETİM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak- 2018

KAHLER-EİNSTEİN METRİK ÜZERİNE

Cemile YETİM

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Mine TURAN

Ocak- 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Cemile YETİM’ in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “KAHLER-EİNSTEİN METRİK ÜZERİNE” başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

04/01/2018

Üye: Doç. Dr. Mine TURAN (Danışman)

Üye: Prof. Dr. Ayşe BAYAR

Üye: Prof. Dr. Erhan ATA

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu’nun …/…/…… gün ve ……sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %10 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Doç. Dr. Mine TURAN   Cemile YETİM

KAHLER-EİNSTEİN METRİK ÜZERİNE

Cemile YETİM
Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2018
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mine TURAN

ÖZET

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konu hakkında genel bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde konu ile gerekli ön bilgi olan tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde reel ve kompleks demetlerden bahsedilip bu demetlerin özellikleri hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Kahler- Einstein metrikleri ve birinci Chern sınıfı tanıtılarak ikisi arasındaki ilişkiye değinilmiştir.

Beşinci bölümde ise birinci Chern sınıfının pozitif olduğu durum incelenmiş ve bu durum için Kahler-Einstein metriğinin bulunması için gerekli olan kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Son bölümde ise bazı öneri ve sonuçlarda bulunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Birinci Chern Sınıfı, Chern sınıfları, Futaki İnvaryantı, Kahler-Einstein Metrik, Vektör Demetleri.

ON KAHLER-EINSTEIN METRIC

Cemile YETİM
Mathematics, M.S. Thesis, 2018
Thesis Supervisor: Assoc. Dr. Mine TURAN

SUMMARY

This study consists of six chapters.

In the first chapter, general information about this study was given.

In the second chapter definitions and theorems which are necessary preliminary information are given.

In the third chapter, real and complex bundles are introduced, the properties of these bundles are given.

In the fourth chapter, Kahler-Einstein metrics and first Chern class are introduced and the relation between these two is mentioned.

In the fifth chapter, the case where the first Chern class is positive is examined. In this case required concept so that Kahler-Einstein metric is found.

In the last chapter, some results are given and are made suggestions.

Keywords: Chern Classes, First Chern Class, Futaki Invariants, Kahler-Einstein metrics, Vector Bundles.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesinde, araştırma aşamasında, yön tayininde ve tez çalışmamın tamamlanmasında destek olan ve çalışması süresince değerli fikirlerini, bilgilerini ve katkılarını esirgemeyen, değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mine TURAN' a,

Yüksek lisans süresince çalışmalarımı destekleyen ve her zaman yanımda olan biricik aileme en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>**Simgeler**</u>	<u>**Açıklama**</u>
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}/2$	Mod 2 Tamsayılar Kümesi
$\cup$	Cup Çarpımı
$\oplus$	Whitney Toplamı
$\times$	Kartezyen Çarpım
$\wedge$	Dış Türev Operatörü
$\otimes$	Tensör Çarpımı
$\cong$	İzomorfizma
$\mathbb{P}^n$	n-boyutlu Reel Projektif Uzay
$\mathbb{CP}^n$	n-boyutlu Kompleks Projektif Uzay
$G_n(\mathbb{R}^{n+k})$	Reel Grassmann Manifoldu
$G_n(\mathbb{C}^{n+k})$	Kompleks Grassmann Manifoldu
$V_n(\mathbb{R}^{n+k})$	Stiefel Manifoldu
$H^i(B;G)$	B nin G Katsayılı i-inci Singüler Kohomoloji Grubu
$H^*(G_n\,;\mathbb{Z}/2)$	Grassmann Manifoldunun Mod 2 Katsayılı Kohomoloji Halkası

1. GİRİŞ

Bir vektör demeti, bir baz uzayı (topolojik uzay) üzerindeki bir noktaya bir vektör uzayı atamanın bir yoludur. Karakteristik sınıflar, her vektör demeti ile bu baz uzayının bir kohomoloji sınıfı arasında eşleme yapar. Kohomoloji sınıfı, özellikle bükülmüş olan demetin mertebesini ölçer. Bu demetin, kesitinin (çapraz kesitinin) olup olmaması önemli değildir. Başka bir deyişle karakteristik sınıflar, bir yerel çarpım yapısının bir genel çarpım yapısından sapmasını ölçer. Bu yapılar cebirsel topoloji, diferansiyel geometri ve cebirsel geometride birleştirici geometrik kavramlardan biridir. Karakteristik sınıflar kohomoloji teorisinin bir kontravaryant yapısıdır (Pragacz, 2012).

Homoloji ve kohomoloji, topolojik uzaylar kategorisinden değişmeli gruplar veya halkalar kategorisine sahip birer funktordur. Homoloji ve kohomoloji arasındaki temel fark: kohomoloji grupları kontravaryant funktorlar iken homoloji grupları kovaryant funktorlar olmasıdır. Funktorlar ise morfizmleri morfizme veya objeleri objeye dönüştüren kategoriler arasında bir fonksiyondur. Homoloji, sadece değişmeli bir grup veya vektör uzayı iken kohomoloji doğal bir şekilde halka (cebir) yapısına sahiptir. Bu nedenle kohomoloji, homolojiye göre daha cebirsel bir yapıya sahiptir. Ayrıca kohomoloji, homolojinin dualidir ve homolojinin cebirsel değişimleri olarak ifade edilir. Daha kısa bir anlatımla kohomoloji bir topolojik uzayın invaryantlarıdır. Homoloji ve kohomoloji grupları çok farklı gibi görünse de çok büyük bir fark yoktur ve bir uzayın homoloji grupları, o uzayın kohomoloji gruplarını belirler (Ozan, 2016).

Kohomoloji grupları kontravaryant funktorlar olduğundan bu kontravaryantlık, kohomolojide ekstra yapılara neden olur. Bu yapılardan biri de bir uzayın kohomoloji gruplarını bir halkaya dönüştüren doğal bir çarpım olan cup çarpımıdır. Bu kohomoloji gruplarının halkaya dönüşümü sırasında Gysin tam dizi ile cup çarpımı kullanılır. Bu tam dizi, karakteristik sınıflardan biri olan Chern sınıfının oluşumundaki etmenlerden biridir (Hatcher, 2002).

Chern sınıfları, bir yönlendirmeye sahip olan kompleks vektör demetlerinin (veya n-düzlem demeti) karakteristik sınıfıdır. İki manifold arasındaki farklılıkları ayırt etmek için kullanılır. İki manifold, farklı Chern sınıflarına sahip ise onlar aynı olamazlar. Fakat iki manifold, aynı Chern sınıflarına sahip olabilir ve hala farklı olabilirler. Chern sınıflarından elde edilen sayılara Chern sayıları denir. Chern sınıflarının sayıları, kompleks boyutlarının (kompleks 1 boyut = reel 2 boyut) sayılarından bağımsızdır. Kompleks 1 boyutlu manifold, bir Chern sınıfına sahiptir. Bu sınıf birinci Chern sınıfı olarak adlandırılır. Kompleks 2 boyutlu manifold, birinci ve ikinci Chern sınıfına sahiptir. Chern sınıfları, manifoldların büyük resmini öğrenmek için çok kullanışlı araçlardır.

Chern sınıflarının ilki olan birinci Chern sınıfının negatif ve sıfır olduğu durumlarda fizikte String teorisinde önemli role sahip olan Kahler-Einstein metriği varlığından bahsedilebilir. Birinci Chern sınıfının pozitif olduğu durumda Kahler-Einstein metrikten söz edilmesi için Futaki invaryantının sıfır olması gerekir. Futaki invaryantı sıfır ise Kahler-Einstein metrik bulunabilir. Kahler-Einstein metrik hem Kahler hem de Einstein olan metriktir. Einstein manifoldlar fizikte, Einstein'ın genel yerçekimi teorisindeki uzay-zamanı belirlemek için kullanılır. Matematikte ise daha karmaşık geometrilerin temel yapı taşıdır. Bu nedenle Kahler-Einstein metrikleri anlamak hem Kahler hem de Einstein manifoldları anlamada kolaylık sağlar. Bu kolaylık ise matematik ve fizikte önemli gelişmeleri yanında getirir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $U \subset E^n$ de bir açık alt cümle olmak üzere

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k. mertebeden bütün kısmi türevleri var ve bu f fonksiyonu sürekli ise, f fonksiyonuna C^k sınıfından diferansiyellenebilir denir (Hacısalihoğlu, 1993; Sağlamer vd., 1995).

Özel olarak $k = 0$ yani f fonksiyonunun kısmi türevlerinin olmaması ve f in sadece sürekli olduğu durumda f, C^0 sınıfındandır denir. $k \in \mathbb{N}$ için $C^k(U, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.2. $U, V \subset E^n$ in iki açık alt cümleler olmak üzere bir

$$\psi: U \longrightarrow V$$

fonksiyonu

i) ψ, C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir.

ii) ψ^{-1}, ψ nin tersi olmak üzere ψ^{-1} var ve ψ^{-1}, C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir.

önermelerini sağlıyor ise ψ fonksiyonuna C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve U ve V açık alt cümlelerine de k. dereceden diffeomorfiktirler denir (Hacısalihoğlu, 1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.3. M, n- boyutlu bir topolojik manifold olmak üzere M üzerinde C^k sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M topolojik manifolduna C^k sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir (Hacısalihoğlu, 1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.4. M bir manifold olmak üzere V, M de bir komşuluk olsun. V nin bir P noktasındaki tanjant uzay $T_V(P)$ olsun. V nin bütün P noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi

$$\bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

ile gösterilsin. Her t_p tanjant vektörü,

$$\pi: \bigcup_{P \in V} T_V(P) \longrightarrow V$$

$$t_p \longrightarrow \pi(t_p) = P$$

dönüşümü biçiminde tanımlansın. O zaman V komşuluğu üzerindeki bir vektör alanı operatörü

$$X: V \longrightarrow \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

şeklinde bir fonksiyondur, öyle ki $\pi \circ X = I$ (birim) dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur (Hacısalihoğlu, 1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.5. $T_{E^n}(P)$ tanjant uzayın cebirsel duali $T^*_{E^n}(P)$ olsun ve $T^*_{E^n}(P)$, E^n in bir P noktasındaki kotanjant uzayı olarak adlandırılır. $T^*_{E^n}(P)$ ın her bir elemanına, E^n in bir P noktasındaki kotanjant vektör denir ve $T^*_{E^n}(P)$,

$$\alpha^*: T_{E^n}(P) \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde lineer vektörlerin kotanjant uzayıdır (Hacısalihoğlu, 1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.6. $T^*_{E^n}(P)$, E^n in bir P noktasındaki kotanjant uzayı olmak üzere, bir

$$w: E^n \longrightarrow \bigcup_{P \in V} T^*_{E^n}(P)$$

fonksiyonu için, $\Pi \circ w$ bir özdeşlik dönüşümü olacak şekilde bir

$$\Pi: \bigcup_{P \in V} T^*_{E^n}(P) \longrightarrow E^n$$

fonksiyonu mevcut ise w ya E^n üstünde 1-form denir (Hacısalihoğlu, 1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.7. $\mathbb{R}$ cismi üzerinde, r-tane vektör uzayı $V_1, V_2, \ldots, V_r$ olmak üzere

$$f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_r \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu , $1 \leq i \leq r$ için $\forall\, u_i, v_i \in V_i$ ve a, b reel sayıları için

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, au_i + bv_i, v_{i+1}, \ldots, v_r) = a.f(v_1, \ldots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \ldots, v_r)$$
$$+b.f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_r)$$

şeklinde tanımlı ise f fonksiyonuna r-lineer fonksiyon denir. Buna göre, f, r-lineer olması her bir V_i ye göre lineer olmasıdır. Örnek olarak r = 2 durumu için,

$$f: V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $u, u_1, u_2 \in V_1$, $v, v_1, v_2 \in V_2$ ve a, b reel sayıları için

$$f(u, av_1 + bv_2) = a.f(u, v_1) + b.f(u, v_2)$$

$$f(au_1 + bu_2, v) = a.f(u_1, v) + b.f(u_2, v)$$

şeklindeki ifadesine bilineer (2-lineer) fonksiyon denir (Hacısalihoğlu, 1980, 1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.8. K cismi üzerinde bir V vektör uzayı olmak üzere

$$[\,,\,]: V \times V \longrightarrow V$$

dönüşümü de;

i) 2-lineer

ii) $\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$ (Alterne)

iii) $\forall X, Y \in V$ için Jacobi özdeşliği

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

şeklinde verilen [,] dönüşümüne, V üzerinde bir Lie operatörü denir. Burada V vektör uzayı Lie cebiri olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu,1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.9. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle\,,\,\rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada $\langle\,,\,\rangle$ fonksiyonuna M üzerinde bir iç çarpım veya Riemann metriği denir (Hacısalihoğlu,1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.10. M bir Riemann manifoldu olmak üzere, M üzerinde olan vektör alanlarının uzayı üzerinde tanımlı $\langle\,,\,\rangle$ Riemann metrik fonksiyonu, M Riemann manifoldunun her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger.

$$\langle\,,\,\rangle(P): T_M(P) \times T_M(P) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \longrightarrow \langle X_p, Y_p \rangle = \langle X, Y \rangle(P) = \langle X, Y \rangle|_P$$

fonksiyonu şeklinde tanımlanabilir. Buna göre $\langle\,,\,\rangle(P)$ bir iç çarpım fonksiyonu olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu,1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.11. M bir C^∞ manifold, M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası da $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere, diferansiyellenebilir

$$\langle\, ,\rangle \;:\chi(M) \text{ x } \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$$

iç çarpım fonksiyonu,

i) 2-lineer

ii) Simetrik

iii) Non- dejenere

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için } \langle X , Y \rangle = 0 \Rightarrow Y = 0 \in \chi(M)$$

özelliklerini sağlıyor ise, M C^∞ manifoldu, bir yarı-Riemann manifoldu olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu,1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.12. M bir C^∞ manifold ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. Bir

$$\nabla:\; \chi(M) \text{ x } \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

fonksiyonu $X, Y \in \chi(M)$ için $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ dir ve

i) $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)\,, \forall\, f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\,\nabla_X Z + g\,\nabla_Y Z$$

ii) $\forall\, X, Y \in \chi(M)\,, \forall\, f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

$$\nabla_X\,(f.Y) = f.\nabla_X\,Y + X[f]\,Y$$

niteliklerini sağlıyorsa ∇ ye M manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon ve ∇_X e de X e göre kovaryant türev operatörü adı verilir (Hacısalihoğlu,1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.13. M bir yarı-Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde bir afin koneksiyon olmak üzere, eğer

i) ∇, C^∞ sınıfındandır

ii) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞olan $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = [X,Y] \qquad \text{(sıfır torsion özelliği)}$$

dir.

iii) M nin bir A bölgesi üzerinde C^{∞}olan $\forall\ X, Y, Z\ \in \chi(M)$ ve $\forall\ p \in A$ için

$$X_p\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle|_P + \langle Y, \nabla_X Z\rangle|_P \quad (\nabla \text{ nin metrik ile bağdaşabilmesi özelliği})$$

dir.

nitelikleri sağlanıyorsa ∇ koneksiyonuna, M yarı-Riemann manifoldu üzerinde bir Riemann koneksiyonu ve ∇_X e de X e göre Riemann anlamında kovaryant türev (Riemannian kovaryant türev) operatörü adı verilir (Hacısalihoğlu,1993; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.14. V, F cismi üzerindeki bir vektör uzayı olsun. Bu vektör uzayında tanımlı bir f bilineer simetrik fonksiyonuna, V üzerinde bir bilineer form denir (Hacısalihoğlu, 1985; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.15. f, V vektör uzayı üzerindeki bir bilineer formu olmak üzere,

$$N_f = \{\alpha \in V : f(\alpha, X) = 0, \forall\ X \in V\}$$

cümlesine f nin sıfır uzayı adı verilir. Eğer $N_f = \{0\}$ ise f ye regülerdir aksi taktirde f singülerdir denir. V sonlu boyutlu olduğunda

$$\text{rank f} = \text{boy V} - \text{boy } N_f$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1985; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.16. M üzerinde bir ∇ afin koneksiyonu ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$T: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümünde $X, Y \in \chi(M)$ için

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

biçiminde tanımlı (1,2) tipindeki tensör alanına M nin torsion tensörü denir (Hacısalihoğlu, 1985; Sağlamer vd., 1995).

$T = 0$ olduğu durumunda

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

dır ve ∇ afin koneksiyonuna M üzerinde sıfır torsionlu (zero-torsion) koneksiyon denir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.17. ∇ afin koneksiyonuna sahip olan (M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere,

$$R(X,Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

biçiminde ifade edilen

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümüne, M Riemann manifoldunun eğrilik tensör alanı ve

$$R(X,Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümüne de eğrilik dönüşümü adı verilir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Özellik 2.1. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$T(X,Y) = -T(Y,X)$$

$$R(X,Y) = -R(Y,X)$$

şeklinde torsion tensörü ve eğrilik dönüşümünün simetrik özelliğidir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.18. (M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere M nin bir sıfır torsionlu ∇ koneksiyonu için $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

eşitliği sağlanıyor ise ∇ sıfır torsion koneksiyonuna M nin Levi-Civita koneksiyonu (Riemann koneksiyonu) denir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.19. M'nin bir U açık alt cümlesi üzerinde

$$w : U \longrightarrow \bigcup_{P \in U} \Lambda^r T_U^*(P)$$

dönüşümünde bir $p \in U$ için

$$w(p) = T_M(P) \times \ldots \ldots \times T_M(P) \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan r- lineer ve anti-simetrik w dönüşümüne U üzerinde bir r-form adı verilir. O zaman;

$$w = \sum w_{i_1,\dots,i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre $\chi(M)$ üzerinde $X_1, X_2, \dots, X_r$ için

$$w(X_1, \dots, X_r) = \sum_{i_1, \dots, i_r} w_{i_1,\dots,i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}(X_1, \dots, X_r)$$

$1 \leq j, k \leq r$ için

$$w(X_1, \dots, X_r) = \frac{1}{r!} \det\left[w_j(X_k) \right]$$

yazılabilir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

$\Lambda^r = \Lambda^r(M)$ ile r = 0, 1, …, n için M üzerindeki r-formların cümlesini gösterelim. Örnek olarak r = 0 durumunu inceleyelim.

$$\Lambda^0 = F(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$$

Λ^r bir reel vektör uzayıdır ve $F(M)$ - modül olarak görülebilir. $f \in F(M)$ ve $w \in \nabla^r$ için fw r-formu, M' nin bir p elemanı için

$$(fw)_p = f(p)\, w_p$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca,

$$\Lambda = \Lambda(M) = \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda^r(M)$$

vektör uzayı $\wedge$ dış çarpım işlemine göre bir reel cebirdir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.20. d: $\Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ dış türev operatörü için,

i) d, $\Lambda(M)$nin kendisi üzerine $d(\Lambda^r) \subset \Lambda^{r+1}$ olacak şekilde bir r-lineer dönüşümdür.

ii) $f \in \Lambda^0 = F(M)$ ise df, f' nin tam diferansiyelidir.

iii) $w_1 \in \Lambda^r$, $w_2 \in \Lambda^s \Rightarrow d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge dw_2 + (-1)^r w_1 \wedge w_2$

iv) $d^2 = 0$ (d diferansiyel operatörü) dir.

yukarıda verilen önermeler geçerlidir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Önerme 2.1. M üzerinde X ve Y birer vektör alanları olmak üzere,

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

dir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Önerme 2.2. K, (1, r)- tipinde bir tensör alanı ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere $X, Y_1, \dots, Y_r \in \chi(M)$ için

$$(L_X K)(Y_1, \dots, Y_r) = [X, K(Y_1, \dots, Y_r)] - \sum_{i=1}^{r} K(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_r)$$

dir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.21. V, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere,

$$X, Y \in V \text{ için } X + iY \ (i = \sqrt{-1})$$

şeklindeki gösterimi V vektör uzayının kompleksleştirilmesidir ve V^C ile gösterilir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.3. $X + iY = X' + iY'$ ancak ve ancak $X = X'$ ve $Y = Y'$ ne eşittir (Yano ve Kon,1984).

Önerme 2.4. V^C, $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayıdır (Yano ve Kon,1984).

İspat: Şimdi vektör uzayı olma şartlarına bakalım.

1) $\forall \ X, X', Y, Y' \in V$ için

$$(X + iY) + (X' + iY') = (X + X') + i(Y + Y')$$

2) $a + ib \in \mathbb{C}$ ve $X, Y \in V$ için

$$(a + ib)(X + iY) = (aX - bY) + i(bX + aY)$$

Yukarıdaki şartları sağladığından V^C, $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayıdır ■ (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.22. V bir vektör uzayı ve $X, Y \in V$ için $Z = X + iY \in V^C$ olmak üzere

$$\bar{Z} = X - iY$$

gösterimi Z kompleks sayısının eşleniği olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

V^C deki kompleks eşlenik $V^C \longrightarrow V^C$ ye lineer eşlenik fonksiyonu üzerinde

1) $\overline{Z+W} = \bar{Z} + \bar{W}$

2) $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\overline{\lambda Z} = \bar{\lambda}\bar{Z}$

biçiminde toplama ve çarpma işlemleri tanımlanır ve buradan

$$V^C \longrightarrow V^C$$

$$Z \longrightarrow \bar{Z}$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

V, n- boyutlu bir vektör uzayı ve V nin $\mathbb{R}$ üzerindeki bazları $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere $X, Y \in V$ için

$$X = \sum_{j=1}^{n} a^j e_j$$

ve

$$Y = \sum_{j=1}^{n} b^j e_j$$

biçiminde gösterilir. Buradan

$$X + iY = \sum_{j=1}^{n} a^j e_j + i\sum_{j=1}^{n} b^j e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(a^j + ib^j)}_{\lambda^j} e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda^j e_j$$

dir. $e_1, e_2, \dots, e_n$ i, V^C nin bazı olarak düşündüğümüzde $\mathbb{C}$ üzerinde lineer bağımsızdır. Eğer;

$\sum_{j=1}^{n} \lambda^j e_j = 0$ ise $\sum_{j=1}^{n} a^j e_j = 0$ ve $\sum_{j=1}^{n} b^j e_j = 0$ dır. Böylece $\forall$ j için $a^j = b^j = 0$ olup $\lambda^j = 0$

dır ve buradan $e_1, e_2, \dots, e_n$, V^C nin bazı olduğu elde edilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.23. V reel bir vektör uzayı, V nin bir J lineer endomorfizmi $J^2 = -I$ (I, V nin birim dönüşümü) ise J, V üzerinde bir kompleks yapı olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

J kompleks yapısıyla birlikte V bir reel vektör uzayı olsun. $X \in V$ ve $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} \lambda X &= (a + ib)X \\ &= aX + ibX \\ &= aX + bJX \qquad\qquad (J^2 = -I) \end{aligned}$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.5.V, $\mathbb{C}$ üzerinde bir reel boyutlu vektör uzayıdır (Yano ve Kon, 1984).

V, n-boyutlu kompleks bir vektör uzayı ve V nin lineer endomorfizmi olan J, $\forall\, X \in V$ için

$$J\,X = i\,X$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.6.V, 2n-boyutlu reel bir vektör uzayı ise J, V nin bir kompleks yapısıdır (Yano ve Kon, 1984).

İspat: J kompleks yapısı ile birlikte V bir reel vektör uzayı olsun. O zaman J den V^C nin bir kompleks endomorfizmine kadar genişlemesi J kompleks yapısı ile

$$J(X + iY) = JX + iJY$$

şeklinde belirtilir. Açıkça $J^2 = -I$ dır ■ (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.24. J kompleks yapısı ile birlikte 2n- boyutlu reel vektör uzayı V nin $X_1, \dots, X_n$ elemanları vardır öyle ki $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$, V nin bir bazıdır. $k = 1, \dots, n$ için

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - i\,JX_k)$$

ve

$$\bar{Z}_k = \frac{1}{2}(X_k + i\,JX_k)$$

biçiminde yazılabilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.25. J kompleks yapısına sahip 2n- boyutlu reel vektör uzayı V nin

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - i\,JX_k)\ , \qquad \bar{Z}_k = \frac{1}{2}(X_k + i\,JX_k)\ , \quad k = 1, \dots, n$$

şeklindeki bazı $\{Z_1, \dots, Z_n, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n\}$ biçiminde olan V^C nin bir bazıdır. $k = 1, \dots, n$ için

$$JZ_k = i\,Z_k$$

ve

$$J\bar{Z}_k = -i\,\bar{Z}_k$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

$V^{1,0} = \{Z \in V^C : JZ = iZ\}$, $V^{0,1} = \{Z \in V^C : JZ = -iZ\}$ olmak üzere kompleks vektör uzayının direk toplamı,

$$V^C = V^{1,0} + V^{0,1}$$

şeklinde tanımlanabilir ve $\bar{V}^{1,0} = V^{0,1}$ dir. Herhangi bir $Z \in V^C$ için

$$Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ)$$

dir. Bununla birlikte

$$V^{1,0} = \{X - iJX : X \in V\}$$

ve

$$V^{0,1} = \{X + iJX : X \in V\}$$

olarak yazılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.26. V reel vektör uzayı olmak üzere V^*, V' nin dual uzayı olmak üzere V^* ın kompleksleşmiş hali ${V^*}^C$ ile gösterilir. V üzerinde J kompleks yapısına karşılık $X \in V$, $X^* \in V^*$ için

$$\langle JX, X^* \rangle = \langle X, JX^* \rangle$$

şeklinde V^* üzerinde bir kompleks yapı gelir ve

$$V_{1,0} = \left\{ X^* \in {V^*}^C : \langle X, X^* \rangle = 0\ , \forall\ X \in V^{0,1} \right\}$$

$$V_{0,1} = \left\{ X^* \in {V^*}^C : \langle X, X^* \rangle = 0\ , \forall\ X \in V^{0,1} \right\}$$

olmak üzere V reel vektör uzayının dual uzayının kompleksleşmiş hali,

$$V^{*^{C}} = V_{1,0} + V_{0,1}$$

şeklinde yazılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.27. M bir reel diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde J bir tensör alanı, M nin her x noktasında, $T_M(x)$ tanjant uzayının $J^2 = -I$ endomorfizmi var ise J, M üzerinde hemen hemen kompleks yapı olarak adlandırılır. (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.28. Sabit bir J hemen hemen kompleks yapısı sahip M manifoldu hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Sonuç 2.1. M hemen hemen kompleks manifold olsun. M nin boyutu 2n'dir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Önerme 2.7. Bir kompleks manifold M olsun. Bu durumda M üzerinde hemen hemen kompleks yapı vardır (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.29. $(z^1, z^2, \dots, z^n)$, M nin bir p noktasının U komşuluğu üzerinde bir kompleks lokal koordinat sistemi olsun. $z^j = x^j + y^j$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $T_M(P)$ nin bir J endomorfizmi,

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}$$

ve

$$J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}$$

ile tanımlanır. J nin tanımı gereği p noktasının komşuluğundaki kompleks lokal koordinat sisteminin seçimine bağlı değildir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.8. M ve M' sırasıyla J ve J' hemen hemen kompleks yapısıyla birlikte hemen hemen kompleks manifold olsun. $J' \circ f_* = f_* \circ J$ ise $f: M \longrightarrow M'$ fonksiyonu hemen hemen komplekstir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 2.9. M ve M' birer kompleks manifold olsun. $f: M \longrightarrow M'$ fonksiyonu holomorfiktir ancak ve ancak f, M ve M' nin hemen hemen kompleks yapısı ile birlikte hemen hemen komplekstir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.30. F, (1,1) – tipinde bir tensör alanı ve $\chi(M)$, M üzerinde vektör alanlarının uzayı olmak üzere $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

biçiminde tanımlanan N_F tensör alanına F nin Nijenhuis torsion tensörü adı verilir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

F = J hemen hemen kompleks yapı olduğunda $J^2 = -I$ olacağından

$$N_J(X,Y) = -[\,X,Y\,] + [\,JX,JY\,] - J[\,JX,Y\,] - J[\,X,JY\,]$$

dir (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.31. M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapısı J olmak üzere eğer bir X vektör alanı için $L_X\, J = 0$ ise X vektör alanı analitik vektör alanı olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984; Sağlamer vd., 1995).

Tanım 2.32. G bir C^∞ manifold, $(G,\circ)$ ikilisi bir grup ve G deki grup işlemi $\circ$ olmak üzere,

$$\circ\ G \times G \longrightarrow G$$

biçiminde a, b ∈ G için

$$(a,b) \longrightarrow ab^{-1}$$

işlemi bir C^∞ fonksiyon oluyor ise $(G,\circ)$grubuna Lie grubu denir (Sağlamer, 1995).

3. DEMETLER

Bu bölümde reel ve kompleks vektör demetlerinden ve bu demetleri oluşturan yapılardan bahsedeceğiz.

3.1. Reel Vektör Demetleri

Tanım 3.1.1. ξ vektör demeti, B ve E, $\pi: E \longrightarrow B$ sürekli dönüşümü olan projeksiyon dönüşümüne sahip iki topolojik uzay olsun. Her $b \in B$ için $\pi^{-1}(b)$ kümesinde bir vektör uzayı yapısı varsa oluşturulabilir. Ayrıca $n \geq 0$ tamsayısı için $\pi^{-1}(U)$ ters görüntüsünün, $U \times \mathbb{R}^n$ kartezyen çarpımına homeomorfik olan bir $b \in U$ komşuluğu var olmalıdır. Yani,

$$h: U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

$$x \longmapsto h(b, x)$$

homeomorfizması vardır. Bu homeomorfizmaya yerel aşikarlaştırma denir. Burada B baz uzayı, $E = E(\xi)$ total uzay olarak adlandırılır. x ile yapılan bu eşleme, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile $\pi^{-1}(b)$ arasında bir izomorfizm tanımlar. Burada (U, h) çifti, b civarında ξ için yerel koordinat sistemidir (Luke ve Mishchenko, 1998; Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Örnek 3.1.1. Tanım 3.1.1. de verilen h homeomorfizmasında U yerine B alındığında

$$h: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(b)$$

elde edilir. Burada ξ vektör demeti, aşikâr demet ve $\pi^{-1}(b)$ ise b üzerinde lif olarak adlandırılır. $\pi^{-1}(b)$ lifi F_b veya $F_b\,(\xi)$ ile gösterilir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

$\pi^{-1}(b)$ lifi üzerinde, bir vektör uzayı yapısı $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $k \in \mathbb{R}$ için

$$(b, x) + (b, y) = (b, x + y)$$

$$k(b, x) = (b, k.x)$$

şeklinde oluşur (Ballmann, 2002).

Tanım 3.1.2. 1- boyutlu vektör demetlerine doğru demetleri adı verilir (Ballmann, 2002).

Tanım 3.1.3. ξ, $\pi: E \longrightarrow B$ projeksiyon dönüşümüne sahip bir vektör demeti, $N \subset B$ ve $\pi^{-1}(N) = E|\, N$ olsun.

$$\pi: E|\, N \longrightarrow N$$

projeksiyonuna, π nin $E|\,N$ ye kısıtlanması denir (Ballmann, 2002).

Tanım 3.1.4. B ve E, $\pi\colon E \longrightarrow B$ bir düzgün dönüşüme sahip iki düzgün manifold olsun. B de alınan her b noktasının U komşuluğu için,

$$h\colon U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

ifadesini diffeomorfizm yapan bir (U, h) yerel koordinat sistemi var ise düzgün vektör demeti olarak adlandırılır (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Aynı baz uzayı üzerinde iki vektör demetlerini ele alalım.

Tanım 3.1.5. ξ ve η iki vektör demeti ve sırasıyla $F_b\,(\xi)$ ve $F_b\,(\eta)$ bu iki vektör demetinin vektör uzayları olsun. ξ ve η nın total uzayları arasında bir

$$f\colon E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$$

homeomorfizması var ve bu homeomorfizma ile, $F_b\,(\xi) \cong F_b\,(\eta)$ oluyor ise $\xi \cong \eta$ dir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Örnek 3.1.2. M manifoldunun τ_M tanjant demetinin total uzayı D_M olmak üzere,

$$D_M = \{(x, V) : x \in M \text{ ve } V, x \text{ te } M \text{ ye tanjanttır}\}$$

biçiminde tanımlanan manifolddur. Ayrıca

$$\pi\colon D_M \longrightarrow M$$

$$(x, V) \longmapsto x$$

projeksiyon dönüşümü vardır ve $x \in M$ deki τ_M tanjant demetinin $\pi^{-1}(x)$ lifi ile tanımlanan x teki M nin tanjant uzayı tanımlanır (Cohen, 1998; Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Örnek 3.1.3. $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}$ deki $[x] = \{\pm x\}$ $\mathbb{R}$-doğrularının projektif uzayı ve

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{([x]\,, V) \mid [x] \in \mathbb{P}^n, V \in [x]\,\}$$

olsun. V vektörü x in bir katı olmak üzere,

$$\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$([x]\,, V) \longrightarrow \pi\,([x]\,, V) = [x]$$

doğal dönüşümü $\mathbb{P}^n$ üzerinde kanonik doğru demeti olarak adlandırılır ve γ_n^1 şeklinde gösterilir (Ballmann, 2002).

$[x] \in \mathbb{P}^n$ doğrusu üzerinde lifi, $V \in [x]$ ile tüm $([x], V)$ çiftlerinden oluşur. Lifler, $\mathbb{R}$-doğrular olduğundan lifler üzerinde $y, z \in [x]$ ve $k \in \mathbb{R}$ için,

$$([x], y) + ([x], z) = ([x], y + z)$$

$$k([x], y) = ([x], k.y)$$

bir reel vektör uzayı yapısı oluşur. π dönüşümünün lifi, 1-boyutlu vektör uzayına dönüşür (Ballmann, 2002).

Tanım 3.1.6. ξ ve ξ' sırasıyla $\pi: E \longrightarrow B$ ve $\pi': E' \longrightarrow B'$ projeksiyonlarına sahip iki reel vektör demetleri olsun. $f: B \longrightarrow B'$ ve $f': E \longrightarrow E'$ düzgün dönüşümleri için $\pi' \circ f' = f \circ \pi$ ve

$$f'|F_b(\xi): F_b(\xi) \longrightarrow F_{f(b)}(\xi')$$

her $b \in B$ için $\mathbb{R}$-lineer ise (f, f') çifti ξ den ξ' ne bir demet dönüşümü tanımlar (Ballmann, 2002).

Eğer $B = B'$ ise $f': E \longrightarrow E'$ dönüşümü bir morfizm, f' morfizmi tersinir ise izomorfizm olarak adlandırılır (Ballmann, 2002).

Örnek 3.1.4. $f: B \longrightarrow B'$ düzgün bir dönüşüm ve f nin diferansiyeli $f^*: \tau_M \longrightarrow \tau_M{}'$ olsun. (f, f^*) çifti bir demet dönüşümüdür (Ballmann, 2002).

Tanım 3.1.7. B üzerinde iki reel vektör demeti ξ ve η ve ξ, $\pi: E(\xi) \longrightarrow B$ projeksiyonuna sahip olsun. $\pi: E(\eta) \longrightarrow B$ olacak şekilde $E(\eta) \subset E(\xi)$ oluyorsa η vektör demetine ξ vektör demetinin alt demeti denir (Ballmann, 2002).

Örnek 3.1.5. $S^n = \{b \in \mathbb{R}^{n+1} | \, |b| = 1\}$ olsun.

$$\{(b, x) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp b\}$$

alt manifoldu, $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ aşikâr demetinin alt demetidir. Bu alt demet aynı zamanda S^n nin tanjant demetine izomorfiktir (Ballmann, 2002).

Örnek 3.1.6. $\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ kanonik demeti $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ aşikâr demetinin alt demetidir. Ayrıca

$$\{([x], V) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid V \perp [x]\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

alt manifoldu da $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ aşikâr demetinin alt demetidir. Bu alt demet $\mathbb{P}^n$ nin tanjant demetine izomorfiktir (Ballmann, 2002).

Tanım 3.1.8. B baz uzayına ve $\pi: E \longrightarrow B$ projeksiyonuna sahip bir vektör demeti ξ ve bu demetin total uzayı $E(\xi)$ olsun. Her $b \in B$ için $\pi \circ s = 1_B$ şeklinde bir

$$s: B \longrightarrow E(\xi)$$
$$b \longmapsto s(b) \in F_b(\xi)$$

dönüşümü ξ vektör demetinin bir kesiti olarak adlandırılır. $U \subset B$ komşuluğu üzerinde bir kesit, $\pi \circ s = 1_U$ olacak şekilde $s: U \longrightarrow E(\xi)$ dönüşümü tarafından tanımlanır (Ballmann, 2002).

Örnek 3.1.7. τ_M , $\pi: D_M \longrightarrow M$ dönüşümü ile bir tanjant demet olsun. τ_M nin bir kesiti, $\pi^{-1}(x)$ lifindeki her $x \in M$ vektörü ile bağlantılı olan herhangi bir $s: M \longrightarrow D_M$ dönüşümü olarak tanımlanır. Yani, $\pi \circ s = 1_M$ ise $s: M \longrightarrow D_M$ dönüşümü, bir kesittir. Bununla beraber τ_M tanjant demetinin bir kesiti, M üzerinde bir vektör alanı olarak adlandırılır (Wendl, 2008)

Tanım 3.1.9. ξ, $\pi: E \longrightarrow B$ projeksiyonuna sahip bir vektör demeti ve $0_b \in F_b(\xi)$ olsun. Her $b \in B$ için $s(b) = 0_b$ tarafından tanımlanan $s: B \longrightarrow E(\xi)$ sürekli fonksiyonuna sıfır kesit adı verilir (Ballmann, 2002).

Önerme 3.1.1. n-boyutlu life sahip, $\pi: E \longrightarrow B$ projeksiyonlu bir ξ vektör demeti aşikâr demettir ancak ve ancak $\forall\, b \in B$ ve $\pi^{-1}(b)$ için $s_1(b), s_2(b), \dots, s_n(b)$ bir taban olacak şekilde $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ n-tane kesiti vardır (Lawson ,2006)

İspat: $f: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E$, B üzerinde bir eşdeğer demet ve s_i kesitleri $s_i(b) = f(b, e_i)$ ile tanımlansın. $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ kesitleri, gerekli kesitlerin kümesidir. $s_i(b) = (b, e_i)$, aşikâr demeti için gerekli kesitlerdir.

Eğer $\pi: E \longrightarrow B$, $\forall\, b \in B$ ve $\pi^{-1}(b)$ için $s_1(b), s_2(b), \dots, s_n(b)$ bir taban olacak şekilde $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ n-tane kesiti ile bir demet ise

$$f: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E$$
$$\big(b, (a_1, a_2, \dots, a_n)\big) \longrightarrow f\big(b, (a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i(b)$$

düzgün dönüşümdür ve her lif üzerinde izomorfizmdir. Buradan f eşdeğer demettir ■ (Lawson, 2006)

Tanım 3.1.10. $\pi: E(\xi) \longrightarrow B$ projeksiyonlu bir vektör demeti ξ ve $f: B_1 \longrightarrow B$ bir düzgün dönüşüm olsun. $\forall\, b \in B_1$ için $\pi^{-1}\big(f(b)\big)$ lifinin

$$(b,x)+(b,y)=(b,x+y)$$

$$k.(b,x)=(b,k.x)$$

şeklinde vektör uzayı yapısı tanımlanır. Ayrıca bu vektör uzayı yapısı aynı zamanda

$$\pi^{-1}(b)=\{(b,x)\mid x\in\ \pi^{-1}(f(b))\}$$

şeklinde verilen $f^*\xi$ demetinin lifin için bir vektör uzayı yapısı oluşur. Bu lif ile tanımlanan $f^*\xi$ demetine pullback demeti adı verilir. $f^*\xi$ pullback demetinin total uzayı $E(f^*\xi)$ olmak üzere tüm $(b,f(b))$ çiftlerinden oluşan $E(f^*\xi)$, $B_1\times E(\xi)$ nin alt kümesidir. Aşağıda verilmiş olan

$$\begin{tikzcd}
E(f^*\xi) \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E(\xi) \arrow[d, "\pi"] \\
B_1 \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

diyagram ile $f^*\xi$ pullback demetinin vektör uzayı yapısı, ξ vektör demetinin vektör uzayına taşınır (Ballmann, 2002; Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

$U\in B$, $b\in U$ olmak üzere (U,h) çifti, ξ vektör demeti için bir yerel koordinat sistemi olsun. $f(b)\in U_1$ için $U_1=f^{-1}(U)$ olmak üzere

$$h_1\colon U_1\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\pi_1^{-1}(U_1)$$

yerel aşikarlaştırması $(b,x)\longmapsto(b,h(f(b),x))$ e taşır. Bu taşıma ile $f^*\xi$ pullback demetinin (U_1,h_1) çifti ile bir yerel koordinat sistemi tanımlanmış olur (Ballmann, 2002; Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Eğer ξ vektör demeti aşikâr ise $f^*\xi$ pullback demeti de aşikardır (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Tanım 3.1.11. ξ, $\pi\colon E\longrightarrow B$ projeksiyonu ile bir $\mathbb{R}$-vektör demet olsun. ξ^*, $\pi^*\colon E^*\longrightarrow B$ kanonik projeksiyonu ile bir demet olmak üzere, ξ^* demeti, ξ vektör demetinin dual demeti olarak adlandırılır. $b\in B$ için $F_b(\xi)$ lifinin duali $F_b^*(\xi^*)$ ile gösterilsin. Burada $F_b^*(\xi^*)=\mathrm{Hom}(F_b(\xi),\mathbb{R})$ dir (Ballmann, 2002).

ξ^* dual demetinin total uzayı E^* olsun.

$$E^* = \bigcup_{b\in B} F_b^*(\xi^*)$$

ayrık birleşimi, $F_b^*(\xi^*)$ lifi $\mathbb{R}$-vektör demeti olacak şekilde bir tek düzgün yapı taşır (Ballmann, 2002).

Örnek 3.1.8. τ_M tanjant demetinin duali, τ_M^* kotanjant demetidir (Ballmann, 2002).

Tanım 3.1.12. $\pi: E \longrightarrow B$ ve $\pi': E' \longrightarrow B'$ projeksiyonları ile ξ ve ξ' iki vektör demeti olmak üzere,

$$\pi' \times \pi : E' \times E \longrightarrow B' \times B$$

projeksiyonuna sahip demet çarpım demeti olarak adlandırılır (Davis, 2013).

Tanım 3.1.13. Aynı B baz uzayı üzerinde, $\pi: E \longrightarrow B$ ve $\pi': E' \longrightarrow B$ projeksiyonları ile ξ ve ξ' iki vektör demeti olsun.

$$E' \oplus E = \{(e', e) \in E' \times E \,|\pi'(e') = \pi(e)\}$$

olmak üzere, $E' \oplus E \longrightarrow B$ diyagonal dönüşümü ile oluşan demete, ξ ve ξ' nün Whitney toplamı denir. $\xi' \oplus \xi$ biçiminde gösterilir ve

$$F_b(\xi' \oplus \xi) \cong F_b(\xi') \oplus F_b(\xi)$$

dir (Davis, 2013).

Tanım 3.1.14. Parakompakt bir B baz uzayı üzerinde, ξ ve η iki vektör demeti ve $\xi \subset \eta$ alt demet olsun. $F_b(\xi^{\perp}) \subset F_b(\eta)$,

$$F_b(\xi^{\perp}) = \{v \in F_b(\eta) : \langle v, w\rangle = 0, \forall\, w \in F_b(\xi)\}$$

göstersin. $\xi^{\perp}$, η vektör demetinde ξ alt demetinin ortogonal tümleyeni olarak adlandırılır (Zinger, 2010; Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

M düzgün bir manifold ve $B \longrightarrow M$ düzgün reel vektör demeti olsun. B üzerinde bir Riemann metriği, düzgün bir şekilde değişen $b \in B$ için B nin her $\pi^{-1}(b) \cong \mathbb{R}$ lifinde pozitif tanımlı bir iç çarpımdır. Her reel vektör demeti, bir Riemann metriği kabul eder. $\xi \subset \eta$ alt demeti her zaman bir Whitney toplanandır (Zinger, 2010; Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Teorem 3.1.1. $\xi^{\perp}$, η da ξ nin ortogonal tümleyeni, $E(\xi^{\perp})$, $\xi^{\perp}$ nin total uzayı ve $\xi^{\perp} \subset \eta$ olmak üzere $\eta \cong \xi \oplus \xi^{\perp}$ dir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Tanım 3.1.15. $\mathcal{V}$, tüm sonlu boyutlu vektör uzayları ve bu vektör uzayları arasındaki tüm izomorfizmlerden oluşan kategori olsun ve

$$T: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

kovaryant funktoru,

1) $\mathcal{V}$ kategorisinin her V, W vektör uzayları için $T(V, W) \in \mathcal{V}$ vektör uzayı ve

2) Her $f: V \longrightarrow V'$ ve $g: W \longrightarrow W'$ izomorfizmaları her çifti için

$$T(f, g): \ T(V, W) \longrightarrow T(V', W')$$

ifadesi bir izomorfizm,

3) 1_V, 1_W sırasıyla V ve W vektör uzayının birimi olmak üzere $T(1_V, 1_W) = 1_{T(V,W)}$ ve

4) $T(f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2) = T(f_1, g_1) \circ T(f_2, g_2)$

özelliklerini sağlar (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

$T(f, g)$ sürekli olarak f ve g ye bağlı ise bu funktora süreklidir denir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

k- değişkenlerin bir

$$T : V \times V \times \ldots \times V \longrightarrow V$$

sürekli funktoru olmak üzere, B baz uzayı üzerinde $\xi_1, \ldots, \xi_k$ vektör demetleri olsun. Aynı B baz uzayı üzerindeki yeni bir vektör demeti, B de her b için

$$F_b = T\big(F_b(\xi_1), \ldots, F_b(\xi_k)\big)$$

eşitliği ve F_b vektör uzaylarının ayrık birleşimi olmak üzere

$$\pi: E \longrightarrow B$$

$$F_b \longrightarrow \pi(F_b) = b$$

şeklinde tanımlansın (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Teorem 3.1.2. E, $\pi: E \longrightarrow B$ projeksiyonlu ve F_b lifli bir vektör demetinin total uzayı olsun. Bu durumda E için bir kanonik topoloji vardır öyle ki bu demet $T(\xi_1, \dots, \xi_k)$ ile gösterilir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Örnek 3.1.9. Tensör çarpımı funktoru ξ ve η iki vektör demetinin $\xi \otimes \eta$ tensör çarpımını, direkt toplam funktoru ise ξ ve η iki vektör demetinin $\xi \oplus \eta$ Whitney toplamını tanımlar (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

$$V \longmapsto \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$$

duallik funktoru da ξ ve η vektör demetlerinin her birini kendi dualine götüren

$$\xi \longmapsto \mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$$

bir funktoru tanımlar (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012)

3.1.1. Reel Grassmann manifoldu

Tanım 3.1.1.1. $\mathbb{R}^{n+k}$ koordinat uzayının orijin boyunca tüm n- boyutlu düzlemlerin kümesine Grassmann manifoldu denir ve $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ile gösterilir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Lemma 3.1.1.1. $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ Grassmann manifoldu, bir düzgün manifold yapısına sahiptir (Mclean, 2016).

Tanım 3.1.1.2. $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ Stiefel Manifoldu, $\mathbb{R}^{nk}$ nın alt uzayı olarak

$$V_n(\mathbb{R}^{n+k}) = \left\{(v_1, \dots, v_n) \in \left(\mathbb{R}^{n+k}\right)^n \mid v_i . v_j = \delta_{ij}\right\}$$

topolojisini veren $\mathbb{R}^{n+k}$ daki ortonormal n-çatıların uzayıdır. Burada $\mathbb{R}^{n+k}$ daki bir n- çatı, $\mathbb{R}^{n+k}$ uzayını geren n-lilerden oluşur (Davis ve Kirk, 1991).

Stiefel ile reel Grassmann manifoldu arasında orijin boyunca reel Grassmann manifoldu üzerinde her düzleme karşılık bir n-çatı gelecek şekilde bir

$$q: V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

kanonik fonksiyon vardır (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Önerme 3.1.1.1. $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ manifoldu, kn- boyutlu bir topolojik manifolddur (Quick, 2016).

Örnek 3.1.1.1. k = 1 durumu için $G_1(\mathbb{R}^{n+1})$ manifoldu, $\mathbb{P}^n$ projektif uzayına eşittir. $(n+1)-$ boyutlu uzayda n- düzlemlerin $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ Grassmann manifoldu kanonik olarak $\mathbb{P}^n$ projektif uzayına homeomorfiktir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Tanım 3.1.1.3. $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ Grassmann manifoldu üzerindeki bir $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ kanonik vektör demeti, lifleri, $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ daki onların bir noktalarına eşit olacak şekilde

$$\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) = \left(\{(X,x) \in G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k} \mid X \ni x\}, \pi, G_n(\mathbb{R}^{n+k})\right)$$

şeklinde ifade edilir (Graumann, 2014).

Lemma 3.1.1.2. $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ vektör demeti yerel aşikarlaştırmayı sağlar (Milnor ve Stasheff, 1974).

İspat: U, X_0 ın bir komşuluğu olsun ve

$$h: U \times X_0 \longrightarrow \pi^{-1}U$$

$$(Y,x) \longrightarrow h(Y,x) = (Y,y)$$

şeklinde koordinat homeomorfizmi vardır. Burada y,

$$p: \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow X_0$$

şeklindeki gibi ortogonal projeksiyonu tarafından x e taşınılan Y deki birim vektörü gösterir.

$$h(Y,x) = (Y, x + T(Y)\, x) \quad \text{ve} \quad h^{-1}(Y,y) = (Y, py)$$

h ve h^{-1} nin sürekli olduğunu gösterir ■ (Milnor ve Stasheff, 1974).

Tanım 3.1.1.4. M düzgün bir n- manifold ve $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ verilmiş olsun.

$$\bar{g}: M \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

$$x \longmapsto \bar{g}(x) = D_M\, X$$

şeklinde ve M de her x'i, x in $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ Grassmann manifoldundaki $D_M\, X$ tanjant uzayına taşıyan fonksiyon Gauss dönüşümü olarak adlandırılır. Bu Gauss dönüşümü

$$g: E(\tau_M) \longrightarrow E\left(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})\right)$$

$(x,\nu) \in E(\tau_M)$ olmak üzere $(x,\nu) \longmapsto (D_M\, X, \nu)$ şeklinde eşleyen demet dönüşümü ile örtülür ve bu g nin yerine

$$\mathrm{g}\colon \tau_M \longrightarrow \gamma^n\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$$

kısa gösterimini kullanacağız. Buradaki g ve $\bar{g}$ süreklidir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

3.1.2. Sonsuz Grassmann manifoldu

Tanım 3.1.2.1. $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^\infty$ alt koordinat uzayı ve

$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_k \mathbb{R}^k$$

oluşmak üzere Grassmann manifoldu,

$$G_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_k G_n\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$$

ile tanımlanır (Quick, 2016).

Tanım 3.1.2.2. $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ sonsuz Grassmann manifoldu üzerinde γ^n kanonik demet,

$$\gamma^n(\mathbb{R}^\infty) = \left(\{(X, x) \in G_n(\mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty \mid X \ni x\}, \pi, G_n(\mathbb{R}^\infty)\right)$$

ile tanımlanır (Quick, 2016).

Lemma 3.1.2.1. γ^n vektör demeti yerel aşikarlık koşulunu sağlar (Milnor ve Stasheff, 1974).

Açıklama 3.1.2.1. $G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$ ve $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ manifoldunda $k = 1$ durumu için $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{P}^n$ ve $G_1(\mathbb{R}^\infty) = \mathbb{P}^{n\infty}$ olduğundan $\gamma^1(\mathbb{R}^{n+1})$ demeti, $\mathbb{P}^n$ üzerinde γ_n^1 demeti ile γ^1 demeti, $\mathbb{P}^n$ üzerinde γ^1 demeti ile aynıdır (Quick, 2016).

3.2. Kompleks Vektör Demetleri

Tanım 3.2.1. V, boy$V = n$ ve $n > 0$ olan bir vektör uzayı olsun. $e_1, \dots, e_n$ ve $e_1{}', \dots, e_n{}'$ iki sıralı baz olmak üzere $A = \left[a_{ij}\right]$ matrisi $e_i{}' = \sum a_{ij}\, e_j$ eşitliğiyle tanımlansın. Bu sıralı iki baz denktir ancak ve ancak $\det A > 0$ dır. V nin bazlarının oluşturduğu denklik sınıfına, standart yönlendirme denir. Denklik bağıntısının iki denklik sınıfı vardır. $e_1, \dots, e_n$ ve $e_1{}', \dots, e_n{}'$ bazları $\det A > 0$ için aynı yönde, $\det A < 0$ için zıt yöndedir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Tanım 3.2.2. ξ, $\pi: E \longrightarrow B$ projeksiyonuna sahip bir vektör demeti olsun. Her $b \in U$ ve $h: u \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ ile U üzerindeki her lifteki yönlendirmeyi $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart yönlendirmeye taşıyan aşikarlaştırmaya yerel uyumluluk koşulu denir (Tajakka, 2015).

Tanım 3.2.3. ξ, $\pi: E \longrightarrow B$ projeksiyonuna sahip bir vektör demeti $b \in B$ için $\pi^{-1}(b)$ de yerel uyumluluk koşulunu sağlayan fonksiyona yönlendirme denir (Tajakka, 2015).

Örnek 3.2.1. M, n- boyutlu düzgün bir manifold ise M üzerinde M nin her noktasında gerçekleşen yönlendirme, $p \in M$ ve her $T_M(p)$ tanjant uzayı için yönlendirmenin bir seçimidir. M de bir yönlendirme, M nin tanjant uzayı için bir yönlendirme varsa M için de bir yönlendirme olup M nin sürekli her noktasında gerçekleşen yönlendirmedir. Yani M nin yönlendirmesi, τ_M tanjant demetinin yönlendirmesidir (Tajakka, 2015).

Tanım 3.2.4. Her $F = \pi^{-1}(b)$ lifine verilen bir üretici $u_F \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$, baz uzayındaki her bir nokta için bir komşuluk N ve bir kohomoloji sınıfı

$$u \in H^n(\pi^{-1}(N), \pi^{-1}(N)_0; \mathbb{Z})$$

olsun. N üzerindeki her F lifi için

$$u \mid (F, F_0) \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$$

kısıtlaması $u|F$ ye eşittir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Tanım 3.2.5. Yönlendirilmiş bir n-düzlem demeti ξ olmak üzere $(E, \emptyset) \subset (E, E_0)$ aşağıdaki kısıtlama homomorfizmasını oluşturur (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

$$H^*(E, E_0; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(E, \mathbb{Z})$$

$$y \longmapsto y|E$$

$u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ temel sınıfına, bu homomorfizmayı uygulandığında

$$u|E \in H^n(E, \mathbb{Z})$$

şeklinde yeni bir kohomoloji sınıfı bulunur. Baz uzayının $H^n(B, \mathbb{Z})$ kohomoloji grubuna, $H^n(E, \mathbb{Z})$ kanonik şekilde izomorfiktir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Tanım 3.2.6. Bir n-düzlem demeti olan ξ nin Euler sınıfı,

$$\pi^*: H^n(B, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(E, \mathbb{Z})$$

$$e(\xi) \longrightarrow \pi^*\big(e(\xi)\big) = u|E$$

şeklinde tanımlanır (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Önerme 3.2.1. $\pi\colon E \longrightarrow B$ ile ξ yönlendirilmiş demeti, sıfır olmayan kesite sahip ise $e(\xi) = 0$ dır (Tajakka, 2015).

3.2.1. Gysin tam dizisi

Tanım 3.2.1.1. ξ , $\pi\colon E \longrightarrow B$ projeksiyon dönüşümüne sahip bir 2n-düzlem demeti olsun. E_0 , E deki sıfır olmayan vektörlerin uzayı olmak üzere π projeksiyonu E_0 uzayına sınırlandırıldığında

$$\pi_0 : E_0 \longrightarrow B$$

dönüşümü ile bir bağıntı elde edilir (Milnor ve Stasheff, 1974).

Teorem 3.2.1.1. ξ, herhangi yönlendirilmiş n-düzlem demeti için, tamsayı katsayılarını kullanarak

$$\ldots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{\cup e} H^{i+n}(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0) \longrightarrow H^{i+1}(B) \xrightarrow{\cup e} \ldots$$

şeklinde bağlantılı bir tam dizisi vardır. Buradaki $\cup\, e$ sembolü $a \longmapsto a \cup e(\xi)$ biçiminde bir homomorfizmi gösterir (Milnor ve Stasheff, 1974).

Tanım 3.2.1.2. ξ, herhangi yönlendirilmiş n-düzlem demet olsun. Katsayı grubu $\mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\ldots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{\cup e} H^{i+n}(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0) \longrightarrow H^{i+1}(B) \xrightarrow{\cup e} \ldots$$

bağlantılı tam dizisine Gysin dizisi denir (Milnor ve Stasheff, 1974)

Sonuç 3.2.1.1. $i < n - 1$ için $H^i(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^i(E_0)$ dönüşümü bir izomorfizmdir (Tajakka, 2015).

Tanım 3.2.1.3. B baz uzayı üzerinde n-boyutlu kompleksin kompleks ω demet (veya kompleks n-düzlem demet), E kompleks demetin total uzayı, $\pi\colon E \longrightarrow B$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $\forall\, b \in B$ için bir vektör uzayı yapısı ve $n \geq 0$ tamsayısı için $\pi^{-1}(U)$ ters görüntüsünün, $U \times \mathbb{C}^n$ kartezyen çarpımına homeomorfik olan bir $b \in U$ komşuluğu var olmasından oluşur (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Tanım 3.2.1.4. $\mathbb{C}^n$ kompleks sayıların n-lilerinin koordinat uzayı olmak üzere

$$U \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

$$\mathrm{b} \times \mathbb{C}^{\mathrm{n}} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathrm{b})$$

şeklindeki homeomorfizma B nin her b noktasının U komşuluğu vardır. Buna kompleks demetler için yerel aşikarlaştırma denir. Bu aşikarlaştırmayı bütün vektör demetleri sağlamak zorundadır (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Örnek 3.2.1.1. $\pi\colon \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{B}$ dönüşümünde $\mathrm{E} = \mathrm{B} \times \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ alınırsa

$$\pi\colon \mathrm{B} \times \mathbb{C}^{\mathrm{n}} \longrightarrow \mathrm{B}$$

dönüşümü ile n- boyutlu aşikâr kompleks vektör demeti oluşur (Zinger, 2010).

Tanım 3.2.1.5. ξ bir reel 2n-düzlem demeti ve $\mathrm{E}(\xi)$ ξ nin total uzayı olmak üzere, eğer $\mathrm{E}(\xi)$ deki her ν vektörü için $\nu \mapsto \mathrm{J}(\nu) \mapsto -\nu$ sağlayan

$$\mathrm{J} : \mathrm{E}(\xi) \longrightarrow \mathrm{E}(\xi)$$

sürekli dönüşümü var ise bu dönüşüm ξ üzerinde bir kompleks yapı olarak adlandırılır (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Reel vektör demetlerine benzer olarak B üzerinde kompleks vektör demetleri, yerel olarak M deki açık kümeler üzerinde $\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ nin demetleri gibi davranırlar. n-boyutlu bir B baz uzayı ve $\pi\colon \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{B}$ projeksiyon dönüşümlü n- boyutlu bir kompleks vektör demeti ise E total uzayı $(\mathrm{n} + \mathrm{k}) -$ boyutludur. n-boyutlu kompleks vektör demeti aynı zamanda 2n- boyutlu reel vektör demetidir. Fakat 2n- boyutlu reel vektör demeti, genel olarak bir kompleks yapı kabul edilmesine gerek yoktur (Zinger, 2010).

Önerme 3.2.1.1. J kompleks yapısına ve $\pi\colon \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{M}$ projeksiyonuna sahip bir reel vektör demeti n-boyutlu düzgün bir kompleks vektör demetinin yapısını kabul eder (Wendl, 2008).

Herhangi bir kompleks n-düzlem demeti olan ω nın her lifini 2n- boyutlu reel bir vektör uzayı olduğundan ω kompleks demeti bir underlying reel 2n- düzlem demeti olarak adlandırılır ve $\omega_{\mathbb{R}}$ ile gösterilir (Zinger, 2010; Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Lemma 3.2.1.1. ω bir kompleks vektör demeti olmak üzere $\omega_{\mathbb{R}}$ underlying reel 2n-düzlem demeti kanonik tercih edilen yönlendirmeye sahiptir (Quick,2014).

Önerme 3.2.1.2. Her sonlu boyutlu kompleks vektör uzayı, bir kanonik yönlendirmeye sahiptir (Tajakka, 2015).

Sonuç 3.2.1.2. Her kompleks vektör demeti, yönlendirmeye sahiptir (Tajakka, 2015).

Tanım 3.2.1.6. $U \subset \mathbb{C}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ koordinat uzayı olsun. $D_U = U \times \mathbb{C}^n$ total uzayına sahip olan τ_U tanjant demetinin, $\mathbb{C}^n$ koordinat uzayının bir elemanı ν ve U nun bir elemanı u için

$$J_0(u, \nu) = (u, i\nu)$$

biçiminde tanımlanan J_0 kanonik kompleks yapısına sahiptir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Tanım 3.2.1.7. $\pi: E \longrightarrow M$ projeksiyonlu holomorfik vektör demeti, E üzerinde bir kompleks manifoldun yapısına sahip bir kompleks vektör demetidir öyle ki herhangi $x \in M$ için M de $x \in U$ vardır ve

$$U \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

kompleks manifoldun biholomorfik dönüşümüne vardır ve buna holomorfik aşikarlaştırma denir (http://toperkin.mysite.syr.edu/talks/vector_bundles_connections_curvature.pdf).

Tanım 3.2.1.8. $f : M \longrightarrow N$, kompleks manifoldlar arasındaki düzgün dönüşümü olmak üzere Df kompleks lineer ise f holomorfiktir. Buradaki kompleks lineer olması $Df \circ J = J \circ Df$ demektir (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

3.2.2. Chern sınıfları

Bu bölümde kompleks vektör demetleri için karakteristik sınıf olan Chern sınıflarını tanımlanmaktadır. Kompleks vektör demetleri bir kanonik yönlendirmeye sahip olduğundan özellikle underlying reel vektör demetinin Euler sınıfının tanımı önce yapılmalıdır. Chern sınıflarını inşa etmek için önce her n-boyutlu kompleks demet için $(n-1)-$ boyutlu demet yapısını inşa edilmelidir. Bu yapıyı tekrarlı bir şekilde gösterilerek çeşitli yardımcı demetlerin Euler sınıflarının indirgemesi olarak Chern sınıflarını tanımlanır (Tajakka, 2015).

$\pi: E \longrightarrow B$ projeksiyonlu vektör demeti olsun. Yeni demetinin baz uzayı E_0 olsun. Bir $e_0 \in E_0$ noktası, $\pi(e_0)$ üzerindeki lifinde sıfırdan farklı vektörler olduğundan, bu nokta üzerindeki yeni demetteki lifi, $\pi(e)$ üzerindeki lifinde e nin ortogonal tümleyeni olarak tanımlanır. e_0 üzerinde lifi, e_0 tarafından gerilen 1- boyutlu uzayı ile $\pi(e_0)$ üzerindeki lifin bölüm uzayı olarak tanımlanır (Tajakka, 2015).

$\pi: E \longrightarrow B$, n-boyutlu kompleks vektör demeti olsun ve E_0, E üzerinde sıfır kesitlerin tümleyenini göstersin. ν vektörü e ile aynı lifin elemanı olmak üzere

$$\hat{E} = \{(e_0, \nu) \in E_0 \times E \mid \nu \in \pi^{-1}(\pi(e_0))\}$$

kümesi alt uzay topolojisini verir. E üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı olmak üzere eğer $(e_0, \nu_1) \sim (e_0, \nu_2)$ tir ancak ve ancak $\nu_1 - \nu_2$, e_0 nin bir skalar çarpımıdır. Böylece her denklik sınıfı, $\langle e_0 \rangle$, e_0 tarafından gerilen 1-boyutlu alt uzay olmak üzere $\pi^{-1}\big(\pi(e_0)\big)/\langle e_0 \rangle$ bölüm vektör uzayı olarak yazılabilir. $\widetilde{E}$, $\widehat{E}/\sim$ şeklinde bölüm topolojisi ile verilsin ve $q : \widehat{E} \longrightarrow \widetilde{E}$ kanonik dönüşüm olsun.

$$\tilde{\pi} : \widetilde{E} \longrightarrow E_0$$

$$[e_0, \nu] \longrightarrow \tilde{\pi}\,([e, \nu]) = e_0$$

projeksiyon dönüşümü olmak üzere $[e_0, \nu] \longmapsto e_0$ taşıması ile $\tilde{\pi} \circ q$ bileşimi sürekli olduğundan $\tilde{\pi}$ dönüşümü iyi tanımlı ve süreklidir. $\tilde{\pi} : \widetilde{E} \longrightarrow E_0$ projeksiyonu ile kompleks vektör demetinin aşağıdaki lemma ile yerel aşikarlaştırmayı sağlar (Tajakka, 2015).

Lemma 3.2.2.1. $E = \mathbb{C}^n$, bir nokta üzerindeki n-boyutlu kompleks demet olmak üzere $\tilde{\pi} : \widetilde{E} \longrightarrow E_0$ dönüşümü ile oluşturulan vektör demeti yerel aşikarlaştırmayı sağlar (Tajakka, 2015).

Önerme 3.2.2.1. Her $\pi : E \longrightarrow B$ projeksiyon dönüşümü n-boyutlu kompleks demet için $\tilde{\pi} : \widetilde{E} \longrightarrow E_0$ projeksiyonu ile oluşturulan kompleks demet yerel aşikarlaştırmayı sağlar (Tajakka, 2015).

Tanım 3.2.2.1. B baz uzayı olmak üzere B üzerinde ω kompleks vektör demeti ve $i \geq 0$ tamsayısı için $c_i(\omega) \in H^{2i}(B;\, \mathbb{Z})$ i-inci Chern sınıfı olarak adlandırılır (Kobayashi, 1987).

$i = 0$ durumunda $c_0(\omega) = 1$ dir ve ω kompleks vektör demeti n- boyutlu ise

- $i > n$ için $c_i(\omega) = 0$
- En son Chern sınıfı $c_n(\omega)$ ve $e(\omega_{\mathbb{R}})$ Euler sınıfı olmak üzere $c_n(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}})$
- $\pi_0^* : H^i(B) \longrightarrow H^i(E_0)$ olmak üzere $i < n$ için $c_i(\omega) = {\pi_0^*}^{-1} c_i(\omega_0)$

dır (Kobayashi, 1987).

$H^{\pi}(B;\, \mathbb{Z})$ halkasında n-boyutlu ω kompleks demetinin toplam Chern sınıfı,

$$c(\omega) = \sum_{i=0}^{n} c_i(\omega)$$

$$= c_0(\omega) + c_1(\omega) + \cdots + c_n(\omega)$$

dir ve $c_0(\omega) = 1$ olduğundan bu toplam

$$c(\omega) = 1 + c_1(\omega) + \cdots + c_n(\omega)$$

şeklinde ifade edilir (Kobayashi, 1987; Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

Lemma (Doğallık) 3.2.2.2. ω ve ω' iki kompleks n-düzlem demeti sırasıyla $\pi: E \longrightarrow B$ ve $\pi': E' \longrightarrow B'$ projeksiyonlarına sahip olsun. $f: B \longrightarrow B'$, $E \longrightarrow E'$ demet dönüşümü tarafından örtülüyor ise her $i \geq 0$ tamsayısı için

$$c_i(\omega) = f^*\big(c_i(\omega')\big)$$

dir (Tajakka, 2015).

Lemma 3.2.2.3. M ve N birer kompleks manifold ve ω M üzerinde bir kompleks vektör demeti ve $f: N \longrightarrow M$, bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşüm olsun. $f^*\omega$, N üzerinde bir pullback demet olmak üzere

$$c(f^*\omega) = f^*\big(c(\omega)\big)$$

dür (Kobayashi, 1987).

Lemma 3.2.2.4. B baz uzayı $B(\omega)$ olmak üzere ε^k, B üzerinde aşikâr kompleks k-düzlem demeti ise o zaman

$$c\big(\omega \oplus \varepsilon^k\big) = c(\omega)$$

dır (Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

3.2.3. Kompleks Grassmann manifoldu

Tanım 3.2.3.1. Kompleks Grassmann manifoldu, $\mathbb{C}^{n+k}$ vektör uzayındaki kompleks n-düzlemlerin kümesidir. $G_n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big)$ ile gösterilir. $G_n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big)$ üzerinde

$$\gamma^n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big) = \big\{(X, \nu) \in G_n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big) \times \mathbb{C}^{n+k} : \nu \in X\big\}$$

biçiminde kanonik kompleks n-düzlem vardır ve $\gamma^n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big) \subset G_n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big) \times \mathbb{C}^{n+k}$ dır (Quick, 2016; Milnor ve Stasheff, 1974; Kocaayan vd., 2012).

$\gamma^n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big)$ kanonik kompleks n- düzlem demetinin total uzayı $E_0\Big(\gamma^n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big)\Big)$ olmak üzere $E_0\Big(\gamma^n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big)\Big)$ üzerindeki topoloji, $G_n\big(\mathbb{C}^{n+k}\big) \times \mathbb{C}^{n+k}$ nin alt kümesi olarak topoloji oluşturur. Ayrıca

$$\pi: E_0\left(\gamma^n\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)\right) \longrightarrow G_n\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)$$

$$(X, \nu) \longrightarrow \pi(X, \nu) = X$$

şeklinde bir projeksiyon dönüşümü ve vektör uzayı yapısı tanımlanır (Quick, 2016).

Özel olarak $k = 1$ alınırsa $G_1\left(\mathbb{C}^{k+1}\right) = \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ dır. $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, $k -$boyutlu kompleks projektif uzayını gösterir (Quick, 2016).

Reel Grassmann manifoldu $kn -$ boyutlu bir manifold olduğundan kompleks Grassmann manifoldu reel $2kn -$ boyutlu bir manifolddur (Quick, 2016).

$\mathbb{C}^\infty$, $\mathbb{C}^{n+k} \subset \mathbb{C}^{n+1+k} \subset \cdots$ kapsamalarından oluşmak üzere $G_n(\mathbb{C}^\infty)$ manifoldu, $\mathbb{C}^\infty$ un tüm $n -$boyutlu lineer alt uzaylarının kümesidir. Buradan

$$G_n\left(\mathbb{C}^{n+k}\right) \subset G_n\left(\mathbb{C}^{n+1+k}\right) \subset \cdots$$

yazılabilir. Sonsuz kompleks Grassmann manifoldu

$$G_n(\mathbb{C}^\infty) = \bigcup_n G_n\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)$$

ile tanımlanan $\mathbb{C}^\infty$ un, tüm $k -$boyutlu kompleks alt vektör uzaylarının kümesidir. $G_n(\mathbb{C}^\infty)$, direk limiti olarak topoloji oluşturabilir. Örnek olarak $G_1(\mathbb{C}^\infty) = \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ sonsuz kompleks projektif uzayı $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \subset \cdots$ dizisinin direk limitine eşit olur (Quick, 2016).

4. KAHLER- EİNSTEİN METRİĞİ

Bu bölümde birinci Chern sınıfının işaret durumu ve Kahler- Einstein metriğinin özellikleri ile ilgili bilgi verilerek birinci Chern sınıfı ile Kahler- Einstein metriği arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir.

4.1. Kompleks Manifold

M, iyi tanımlı holomorfik fonksiyonlara sahip düzgün manifold olsun. Daha açık bir ifade ile kompleks boyutu sıfırdan büyük n tamsayısı için M, $U_\alpha \subset M$ ve $V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ açık kümeleri ile

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$$

homeomorfizmi tarafından örtülür öyle ki $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ öteleme dönüşümü her yerde tanımlanabilen holomorfiktir. $f \circ \varphi_\beta^{-1}$ birleşimi her α için V_α üzerinde holomorfik ise $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu da holomorfiktir. Verilen dönüşümleri kullanarak herhangi bir yakın $p \in M$ noktası, her i için $z^i(p) = 0$ olan kompleks değerli fonksiyonlardan oluşan $z^1, \dots, z^n$ şeklinde bir holomorfik koordinat sistemi vardır. Ayrıca $w^1, \dots, w^n$ şeklinde farklı bir koordinat sistemi varsa her w^i, $z^1, \dots, z^n$ nin holomorfik bir fonksiyonudur (Szekelyhidi, 2013).

Örnek 4.1.1. (Riemann Küresi) $M = S^2$ olsun ve $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ birim küre olarak düşünelim. Burada iki dönüşüm tanımlayalım. $U_1 = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ gibi kuzey kutbun tümlemesi olsun ve

$$\varphi: U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

kuzey kutbundan xy-düzlemine kadar üç boyutlu harita projeksiyonu olarak tanımlansın. Benzer şekilde $U_2 = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ güney kutbun tümlemesi olsun ve

$$\psi: U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

kompleks eşlenik ile güney kutbundan xy-düzlemine harita projeksiyonunun birleşimi olsun.
$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

hesaplaması yapılabilir. Bu öteleme fonksiyonu holomorfik olduğundan iki harita bir kompleks manifoldun yapısı S^2 yi verir (Szekelyhidi, 2013).

Örnek 4.1.2 (Kompleks Projektif Uzay). $\mathbb{CP}^n$ kompleks projektif uzay, $\mathbb{C}^{n+1}$ deki kompleks doğruların uzayı olarak tanımlanır. Başka bir deyişle $\mathbb{CP}^n$ nin noktaları her sayısı sıfır olmayan $[Z_0 : \dots : Z_n]$ $(n+1)$- lileridir ve her $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için

$$[Z_0 : \dots : Z_n] = [\lambda Z_0 : \dots : \lambda Z_n]$$

tanımlanır. $\mathbb{CP}^n$ topolojik bir uzay olarak bu denklik bağıntısı altında $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0, \dots, 0\}$ dan bölüntü topolojisi kalır. $Z_0, \dots, Z_n$ homojen koordinatları hatırlayalım. Kompleks yapıyı tanımlamak için $n+1$ harita kullanalım. $i \in \{0,1,\dots,n\}$ için

$$U_i = \{ [Z_0 : \dots : Z_n] : Z_i \neq 0 \}$$

ve

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$[Z_0 : \dots Z_i \dots : Z_n] \longrightarrow \left(\frac{Z_0}{Z_i}, \dots, \frac{Z_n}{Z_i}\right)$$

olsun. Burada $\frac{Z_i}{Z_i}$ terimi dahil edilmediğinden öteleme fonksiyonlarının holomorfik olan kısmını kontrol etmek kolaylaşır. Örneğin $\mathbb{C}^n$ üzerinde $w^1, \dots, w^n$ koordinatlarını kullanarak

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}[w^1, \dots, w^n] = \left(\frac{1}{w^1}, \frac{w^2}{w^1}, \dots, \frac{w^n}{w^1}\right)$$

yazılabilir. $n = 1$ durumunda örnek 3.1.1. deki gibi aynı öteleme fonksiyonu ile iki harita elde ederiz. Böylece $\mathbb{CP}^1 = S^2$ kompleks manifolddur (Szekelyhidi, 2013).

Örnek 4.1.3. (Projektif Manifold) $f_1, \dots, f_k$, $Z_0, \dots, Z_n$ deki homojen polinomlar olsun. f_i, $\mathbb{CP}^n$ üzerinde iyi tanımlı fonksiyon olmamalarına rağmen f_i lerin sıfır kümesi iyi tanımlıdır. $V \subset \mathbb{CP}^n$ ve

$$V = \left\{ [Z_0 : \dots : Z_n] \ \middle| f_i(Z_0, \dots, Z_n) = 0, i = 1, \dots, k \right\}$$

f_i lerin sıfır kümesi olsun. Eğer V, $\mathbb{CP}^n$nin bir düzgün alt manifoldu ise V bir kompleks alt manifolddur. V nin haritalarını kapalı fonksiyon teoremini kullanarak oluşturulabilir. Projektif manifold kompakt olduğundan kompakt bir uzayın alt kümeleri de kapalı olur (Szekelyhidi, 2013).

Tanım 4.1.1. M bir düzgün manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks yapı, M nin tanjant demetlerinin

$$J: \tau_M \longrightarrow \tau_M$$

endomorfizmidir öyle ki $J^2 = -I$ (Id birim dönüşüm) dir (Szekelyhidi, 2013).

Başka bir deyişle hemen hemen kompleks yapı, tanjant uzayın her noktasında $\sqrt{-1}$ çarpımlı bilineer dönüşüm gibi davranır. M nin boyutu çift olmalıdır çünkü tek boyutlu vektör uzayının herhangi bir endomorfizmi karesi -1 olmayan bir öz değere sahiptir (Szekelyhidi, 2013).

Örnek 4.1.4. M kompleks bir manifold ise holomorfik haritalar $\mathbb{C}^n$ ile bir p noktasında her bir tanjant uzayına karşılık gelir. Eğer M nin lokal kompleks koordinatları $z^1, \dots, z^n$ ise M nin lokal reel koordinatları $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$ şeklinde yazabiliriz. Bununla beraber J

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}\ , \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i}$$

sağlayan tek lineer dönüşümüdür. $T^C M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ olduğundan lokal holomorfik koordinatları

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\}$$

biçiminde yazılabilir. $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$ yi reel ve imajiner kısımlarına ayırdığımızda

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

elde edilir. J endomorfizmi, $T^C M$ nin kompleks lineer endomorfizmine genişler ve J nin, $T^{1,0}M$ nin $+i\left(\sqrt{-1}\right)$ ve $T^{0,1}M$ nin $-i\left(-\sqrt{-1}\right)$ öz uzayına kompleksleştirilmiş tanjant demetinin ayrışımı

$$T^C M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

şeklinde ifade edilir. Burada belirtilen $T^{1,0}M$ holomorfik tanjant demeti olarak isimlendirilir. $T^{1,0}M$, $\frac{\partial}{\partial z^i}$ tarafından ve $T^{0,1}M$ de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$ tarafından gerilir (Szekelyhidi, 2013; Faulk vd., 2016).

Örnek 4.1.5. $\Omega^1_{\mathbb{C}}$ M nin içine J ye dual endomorfizminin öz değerlerine göre ayrıştırılan kotanjant demetini elde etmek için kompleksleştirelim.

$$\Omega^1_{\mathbb{C}}\ M = \Omega^{1,0}\ M \oplus \Omega^{0,1}\ M$$

şeklinde kotanjant demetini ayrışımı gösterilir. Burada $\Omega^{1,0}$ holomorfik kotanjant demet olarak adlandırılır. Ayrıca holomorfik tanjant demet ile holomorfik kotanjant demet arasındaki ilişki

$$\Omega^{1,0}\,M = (T^{0,1}M)^{\perp}$$

ve

$$\Omega^{0,1}\,M = (T^{1,0}M)^{\perp}$$

şeklinde gösterilir (Szekelyhidi, 2013; Faulk vd., 2016).

$$dz^i = dx^i + \sqrt{-1}dy^i$$

ve

$$d\bar{z}^i = dx^i - \sqrt{-1}dy^i$$

olmak üzere $\Omega^{1,0}$, $dz^1, \ldots, dz^n$ tarafından gerilirken $\Omega^{0,1}$ de $d\bar{z}^1, \ldots, d\bar{z}^n$ tarafından gerilir. $\{dz^1, \ldots, dz^n, d\bar{z}^1, \ldots, d\bar{z}^n\}$ koordinatları, $T^{C}M$ nin lokal holomorfik koordinatının dualidir (Szekelyhidi, 2013).

Kompleksleştirilmiş kotanjant demetinin daha yüksek derecelere genişlemesi $p + q = r$ olmak üzere

$$\Omega^r_{\mathbb{C}}\,M = \bigoplus \Omega^{p,q}\,M$$

dir. $\Omega^{p,q}M$, $dz^{i_1}\wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}$ tarafından lokal olarak gerilir. Ayrıca bir kompleks manifold üzerinde $d = \partial + \bar{\partial}$ dış türevin ayrışması

$$\partial = \Omega^{p,q}\,M \longrightarrow \Omega^{p+1,q}\,M$$

$$\bar{\partial} = \Omega^{p,q}\,M \longrightarrow \Omega^{p,q+1}\,M$$

şeklindedir ve bu gösterim d nin iki farklı projeksiyonudur. Herhangi α formu için $\bar{\partial}\alpha = \overline{\partial\bar{\alpha}}$ dir (Szekelyhidi, 2013).

Önerme 4.1.1. $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun.

$\bar{\partial}f = \dfrac{\partial f}{\partial\,\bar{z}^1}d\bar{z}^1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial\,\bar{z}^n}d\bar{z}^n$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial\,\bar{z}^i}$ Cauchy-Riemann denklemleri olmak üzere

f fonksiyonu holomorfiktir ancak ve ancak $\bar{\partial}f = 0$ dır (Szekelyhidi, 2013).

Örnek 4.1.6. $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}f$ bir reel (1,1)-formdur. Eğer $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ ise

$$\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}f = \sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(dx + \sqrt{-1}dy\right) \wedge \left(dx - \sqrt{-1}dy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy$$

dir (Szekelyhidi, 2013).

4.2. Hermitian ve Kahler Metrikleri

Riemann metriğinin, her bir tanjant uzay üzerindeki pozitif tanımlı bir simetrik bilineer formdur.

Tanım 4.2.1. J kompleks yapısı ile birlikte M bir kompleks manifold olmak üzere herhangi X, Y tanjant vektörleri için $g(JX, JY) = g(X, Y)$ ise g Riemann metriği M üzerinde bir Hermitian metrik olarak adlandırılır. Başka bir deyişle her bir tanjant uzay üzerinde ortogonal dönüşüm olması için J kompleks yapısı gerekir (Szekelyhidi, 2013).

$z^1, \dots, z^n$ lokal koordinatlarda bir Hermitian metrik

$$g_{j\bar{k}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right)$$

tarafından belirlenir. Her iki taraf da kompleks lineerlik ile g den kompleks tanjant vektörlerine genişler. Herhangi j, k için Hermitian durumu,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial z^k}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) = 0$$

eşitliğini sağlar. Bununla beraber $g_{j\bar{k}}$ açısından

$$g = \sum_{j,k} g_{j\bar{k}}\left(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j\right)$$

yazılabilir. Burada $g_{j\bar{k}}$ gösteriminde $\bar{k}$, holomorfik ve antiholomorfik bileşenlerin arasındaki ayrım için kullanılır (Szekelyhidi, 2013).

g Hermitian metriği, herhangi X, Y için $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$ eşitliği vardır. Burada ω, X, Y de anti-simetriktir ve bu ω yolundaki $(1,1)$-tipinin bir reel 2- formunu tanımlar (Szekelyhidi, 2013).

Tanım 4.2.2. M üzerinde g bir Hermitian metrik olmak üzere 2- formu ω kapalı yani $d\omega = 0$ ise g Kahler metrik ve ω Kahler formu olarak isimlendirilir (Szekelyhidi, 2013).

Kapalı $(1,1)$ - formu ω bir Kahler metrik belirleyebilir. ω , $\omega(JX, JY) = \omega(X,Y)$ anlamında J ile bağdaşık olsun. Bu durumda

$$g(X,Y) = \omega(X, JY)$$

tarafından tanımlanan $(0,2)$-tensör, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Bu nedenle g metriği Kahlerdir (Faulk, 2016).

g nin simetriği $\overline{g_{j\bar{k}}} = g_{k\bar{j}}$ şeklinde gösterilir. g nin pozitif olması $g_{j\bar{k}}$ nin her noktada pozitif tanımlı Hermitian matrisinin var olduğu anlamına gelir. Bağlantılı 2- form için

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{j,k} g_{j\bar{k}}\; dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

yazılabilir. Her i, j, k için

$$\frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}} = \frac{\partial}{\partial z^j} g_{i\bar{k}}$$

eşitliği yazılabilirse g Kahlerdir (Szekelyhidi, 2013).

Örnek 4.2.1. $\omega = \sqrt{-1}\sum_j dz^j \wedge d\bar{z}^j$ tarafından belirlenen metrik ile $\mathbb{C}^n$ kompleks manifoldu Kahlerdir (Faulk, 2016).

Örnek 4.2.2 (Fubini- Study Metrik). $\mathbb{CP}^n$ kompleks projektif uzayı Fubini- Study metriği denilen ve ω_{FS} ile gösterilen doğal bir Kahler metriğine sahiptir. Şimdi bu metriği inşa edelim. Bunun için de öncelikle

$$\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

projeksiyon fonksiyonunu hatırlayalım. $U \subset \mathbb{CP}^n$ açık bir küme üzerinde s kesiti $s: U \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ bir holomorfik fonksiyondur öyle ki $\pi \circ s$ birimdir. Verilen s kesiti

$$\omega_{FS} = \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\|s\|^2$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımın iyi tanımlı olduğunu gösterelim. s', açık bir V kümesi üzerinde başka bir kesit olsun. $U \cap V$ alt kesiti üzerinde $f: U \cap V \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorfik fonksiyonu için $s' = fs$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\|s'\|^2 &= \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\|fs\|^2\\ &= \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\|s\|^2 + \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log f + \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\bar{f}\\ &= \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\|s\|^2\end{aligned}$$

dir. Kesitler, küçük açık U kümeleri üzerinde var olduğundan $\mathbb{CP}^n$ üzerinde kapalı ve iyi tanımlı $(1,1)$-form elde edilir (Szekelyhidi, 2013).

ω_{FS} formu, $U(n+1)$- invaryanttır ve $U(n+1)$, $\mathbb{CP}^n$ üzerinde geçişken olarak hareket eder. Bu yüzden uygun Hermitian matrisinin bir tek noktada pozitif tanımlı olup olmadığını kontrol etmek yeterlidir. $[1:0:\dots:0]$ noktasında, U_0 haritası üzerinde $i = 1,2,\dots,n$ için

$$z^i = \frac{z_i}{z_0}$$

lokal holomorfik koordinatlar kullanılır. Bir kesit

$$s(z^1,\dots,z^n) = (1, z^1,\dots,z^n)$$

tarafından verilir ve

$$\omega_{FS} = \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log(1 + |z^1|^2 + \dots + |z^n|^2) \tag{4.1}$$

dir. Bu eşitlik orijinde

$$\sqrt{-1}\sum_i dz^i \wedge d\bar{z}^i$$

ifadesine eşit olur. Uygun bir Hermitian matrisi, pozitif tanımlı olan birim matristir. (4.1) eşitliğinden açıkça ω_{FS} lokal olarak doğru olduğundan kapalıdır (Szekelyhidi, 2013).

Örnek 4.2.3. Eğer V, (M,ω) bir Kahler manifoldunun kompleks alt manifoldu ise V üzerinde indirgenmiş metrik, d diferansiyeli $i: V \longrightarrow M$ kapsamasına karşılık gelen i^* pullback ile değiştiğinden Kahlerdir (Faulk, 2016).

Örnek 4.2.4. Eğer $V \subset \mathbb{CP}^n$ bir projektif manifold ise V ye sınırlandırılmış ω_{FS}, dış türevi diferansiyel formları geri çekilmeyle değiştiği için V üzerinde bir Kahler metriktir (Szekelyhidi, 2013).

ω Kahler formu, kapalı bir reel form olduğundan $H^2(M;\mathbb{R})$ de, $[\omega]$ kohomoloji sınıfı tanımlar. Sabit bir kohomoloji sınıfında Kahler metrikleri reel değerli fonksiyonlar tarafından parametrelendirilir. Ayrıca bir temel sonuç olarak kompakt bir manifold üzerinde gösterilen $\partial\bar{\partial}$-lemmasıdır (Szekelyhidi, 2013).

Lemma 4.2.1 ($\partial\bar{\partial}$-lemma). M bir kompakt Kahler manifold olsun. Eğer ω ve η aynı kohomoloji sınıfında iki reel $(1,1)$- form ise $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon vardır öyle ki

$$\eta = \omega + \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial} f$$

tir (Szekelyhidi, 2013).

Önerme 4.2.1 (Normal Koordinatlar). Eğer g bir Kahler metrik ise herhangi $p \in M$ noktasında var olan $z^1, \ldots, z^n$ holomorfik koordinatlar seçilebilir öyle ki

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

birim matris olmak üzere p noktasında g nin bileşimi,

$$g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk}$$

eşitliğini sağlar ve

$$\frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}}(p) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} g_{j\bar{k}}(p) = 0$$

dır (Szekelyhidi, 2013).

4.3. Holomorfik Doğru Demetleri

Tanım 4.3.1. M bir kompleks manifold olsun. M üzerinde bir holomorfik doğru demeti, $L = \bigcup_{p \in M} L_p$ ayrık birleşimi üzerinde bir kompleks manifoldun yapısı ile birlikte 1- boyutlu kompleks vektör uzayının $\{L_p\}_{p \in M}$ ailesinden oluşur öyle ki $\pi: L \longrightarrow M$ doğal projeksiyon fonksiyonu holomorfiktir. Her $p \in M$ noktası için M de p nin bir U açık komşuluğu vardır. Ayrıca $\mathrm{proj}_1: U \times \mathbb{C} \longrightarrow U$ birinci faktörü üstündeki projeksiyonu olmak üzere $\pi = \mathrm{proj}_1$ projeksiyon fonksiyonu ile değişen ve $p \in U$ için her L_p lifi üzerinde lineer olan $\varphi: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}$ bir biholomorfizm vardır (Faulk, 2016).

Tanım 4.3.2. $s: M \longrightarrow L$ düzgün kesit olmak üzere kompleks manifoldun bir fonksiyonu olarak holomorfik ise s düzgün kesiti holomorfik olarak adlandırılır. Holomorfik kesitlerin uzayını $H^0(M, L)$ ile gösterilir (Faulk, 2016).

Tanım 4.3.3. L, M üzerinde holomorfik doğru demeti ise her L_p^{-1} lifi, L_p dual vektör uzayı olmak üzere L nin duali, M üzerinde L^{-1} holomorfik doğru demetidir. Eğer $g_{\alpha\beta}$, L için öteleme fonksiyonları ise L^{-1} için öteleme fonksiyonları $g_{\alpha\beta}^{-1}$ ile gösterilir (Faulk, 2016).

Örnek 4.3.1. $\mathbb{CP}^n$ üzerinde $\mathcal{O}(-1)$ doğru demeti tanımlayalım. $\mathcal{O}(-1)$, noktası üzerinde lif, ℓ doğrusu kendi kendine ℓ doğrusu tarafından belirlenen $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ aşikâr demetin alt demeti olsun. Eğer U_j,

$$U_j = \{[Z_0, \dots, Z_n]: Z_j \neq 0\}$$

ile verilen $\mathbb{CP}^n$ üzerinde harita belirtir ise öteleme fonksiyonları bu haritalara göre oluşan $\mathcal{O}(-1)$ doğru demeti için

$$g_{jk}([Z_0, \dots, Z_n]) = \frac{Z_j}{Z_k}$$

olur. $\mathcal{O}(1)$ in dualini $\mathcal{O}(-1)$ ile gösterilsin. Ayrıca tensör kuvveti alarak $\mathbb{Z}$ deki her ℓ için $\mathcal{O}(\ell)$ holomorfik doğru demeti elde edilir. $\mathcal{O}(\ell)$ için öteleme fonksiyonları

$$g_{jk}^{(\ell)}([Z_0, \dots, Z_n]) = \left(\frac{Z_k}{Z_j}\right)^{\ell}$$

eşitliğini sağlar. $\mathbb{CP}^n$ üzerindeki her holomorfik doğru demeti, bazı ℓ için $\mathcal{O}(\ell)$ formudur (Faulk, 2016).

Genel kesitlerinin $H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}(\ell))$ uzayının karakterizasyonu aşağıdaki gibidir:

- $\ell < 0$ için $H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}(\ell)) = 0$.

- $\ell \geq 0$ için $H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}(\ell))$ uzayı, $n + 1$ değişkeni olan $Z_0, \dots, Z_n$ deki ℓ dereceli homojen polinomların uzayı ile birlikte tanımlanabilir (Faulk, 2016).

$n = 1$ ve $\ell = 1$ olduğu durumu ele alalım. Bu durumda $\mathcal{O}(1)$ in küresel kesiti,

$$s_1 = \left(\frac{Z_0}{Z_1}\right) s_0$$

eşitliğini sağlayan $s_0 \colon U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ ve $s_1 \colon U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfik fonksiyonlarından oluşur (Faulk, 2016).

$s_1 \colon U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfik fonksiyonu,

$$s_1 = a_0 + a_1 \frac{Z_0}{Z_1} + a_2 \left(\frac{Z_0}{Z_1}\right)^2 + \cdots$$

şeklinde Taylor seri açılımına sahiptir. Ayrıca

$$s_0 = b_0 + b_1 \frac{Z_1}{Z_0} + b_2 \left(\frac{Z_1}{Z_0}\right)^2 + \cdots$$

yazılabilir. s_0 ve s_1 arasındaki ilişki

$$b_0 \frac{Z_0}{Z_1} + b_1 \frac{Z_1}{Z_0} + b_3 \left(\frac{Z_1}{Z_0}\right)^2 + \cdots = a_0 + a_1 \frac{Z_0}{Z_1} + a_2 \left(\frac{Z_0}{Z_1}\right)^2 + \cdots$$

dir. Böylece $b_0 = a_1$ ve $b_1 = a_0$ bulunur. Diğer tüm a_j, b_k lar sıfırdır. Eğer $f = a_1 Z_0 + a_0 Z_1$ ise $s_1 = f/Z_0$ ve $s_0 = f/Z_1$ elde edilir. Aksi taktirde herhangi bir f, $\mathcal{O}(1)$ in holomorfik kesiti belirler (Faulk, 2016).

Örnek 4.3.2. M, n-boyutlu ise holomorfik kotanjant demetin $K_M \coloneqq \wedge^n \Omega^{1,0} M$ en üst dış kuvveti M nin kanonik demeti olarak adlandırılan M üzerinde holomorfik doğru demetidir. Lokal olarak M üzerinde $(z^1, \ldots, z^n)$ kompleks koordinatlar olmak üzere K_M nin aşikarlaştırması $dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$ tarafından verilir (Faulk, 2016).

Tanım 4.3.4. h, L holomorfik doğru demeti üzerinde hermitian metriği h_p, L nin s_1, s_2 lokal düzgün kesitlerinin her çifti için düzgün olan L_p üzerinde bir iç çarpım olmak üzere; hermitian iç çarpımının $\{h_p\}_{p \in M}$ ailesinden oluşur. $p \longmapsto h_p\big(s_1(p), s_2(p)\big)$ lokal $\mathbb{C}$- değerli fonksiyonu düzgündür. Metriği

$$\langle s_1, s_2 \rangle_h = h(s_1, s_2)$$

şeklinde de yazılır. Ayrıca $\|s\|_h^2 = \langle s, s \rangle_h$ dir (Faulk, 2016).

Tanım 4.3.5. M, h hermitian metriği ile holomorfik doğru demeti olsun. (L,h) nin eğriliği**,** L nin lokal sıfır olmayan holomorfik bir s kesiti için

$$-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\|\mathrm{s}\|_{\mathrm{h}}^{2}$$

lokal ifadesi ile M üzerinde (1,1)- formudur (Faulk, 2016).

Açıklama 4.3.1. Eğrilik, iyi tanımlıdır. Eğer s', sıfır olmayan başka bir holomorfik kesit ise bir lokal holomorfik f fonksiyonu vardır öyle ki $\mathrm{s}' = \mathrm{fs}$ dir. Böylece $\|\mathrm{s}'\|_{\mathrm{h}}^{2} = |\mathrm{f}|^{2}\|\mathrm{s}\|_{\mathrm{h}}^{2}$ dir. Buradan

$$-\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\|\mathrm{s}'\|_{\mathrm{h}}^{2} = -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\|\mathrm{s}\|_{\mathrm{h}}^{2} - \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\mathrm{f} - \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\bar{\mathrm{f}}$$

dir. f holomorfik olduğundan log(f) ve sağ taraftaki ikinci terim sıfırdır. $\bar{\mathrm{f}}$, anti- holomorfik olduğundan $\log(\bar{\mathrm{f}})$ ve üçüncü terim

$$-\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\bar{\mathrm{f}} = \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\bar{\mathrm{f}} = 0$$

dır. Böylece

$$-\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\mathrm{h}(\mathrm{s}') = -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\mathrm{h}(\mathrm{s})$$

dir. Bu da eğriliği s nin sıfır olmayan holomorfik kesitlerinin seçimi bağımsızdır (Faulk, 2016).

Tanım 4.3.6. $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \longmapsto \alpha(\mathrm{X},\mathrm{JY})$ ile tanımlanan 2- tensör pozitif tanımlı ise M üzerinde α (1,1)-formu pozitiftir denir. Negatif (1,1)-formu da benzer yolla tanımlanır (Faulk, 2016).

Örnek 4.3.3. α (1,1)-formu

$$\alpha = \sqrt{-1}\alpha_{\bar{\mathrm{k}}\mathrm{j}}\,\mathrm{dz}^{\mathrm{j}} \wedge \mathrm{d}\bar{\mathrm{z}}^{\mathrm{k}}$$

şeklindeki lokal ifadesine sahiptir. α pozitiftir ancak ve ancak $\alpha_{\bar{\mathrm{k}}\mathrm{j}}$, pozitif tanımlı matris tanımlar. Örneğin $\mathbb{CP}^{\mathrm{n}}$ üzerinde ω_{FS} Fubini- Study formu, pozitif (1,1)-formdur (Faulk, 2016).

Tanım 4.3.7. L holomorfik doğru demeti, pozitif eğrilik formuna karşılık gelen bir hermitian metriğe sahipse L, pozitif olarak adlandırılır. Negatif doğru demeti kavramı benzer şekilde tanımlanır (Faulk, 2016).

4.4. Birinci Chern Sınıfı

Tanım 4.4.1. L bir holomorfik doğru demeti olsun. L nin $c_1(L)$ birinci Chern sınıfı, L üzerinde bazı h hermitian metrik ve L nin bazı lokal holomorfik sıfır olmayan s kesiti için

$$\frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|s\|_h^2$$

şeklinde lokal ifadesi ile $(1,1)$-form tarafından belirlenen kohomoloji sınıfıdır (Faulk, 2016).

Açıklama 4.4.1. Birinci Chern sınıfı, hermitian metriğin seçimine bağlı değildir. Eğer h', L üzerinde başka bir hermitian metrik ise bazı pozitif lokal λ fonksiyonu için

$$\|s\|_{h'}^2 = \|s\|_h^2$$

dir. Buradan

$$\frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|s\|_{h'}^2 = \frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|s\|_h^2 - \frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\lambda$$

hesaplanabilir. Bu eşitlikte ikinci terim $\partial\bar{\partial}\log\lambda = (\partial+\bar{\partial})\bar{\partial}\log\lambda = d(\bar{\partial}\log\lambda)$ olarak tamdır (Faulk, 2016).

Açıklama 4.4.2. $c_1(L)$, integral kohomoloji sınıfıdır. Yani $c_1(L) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ dir. Daha açık yazılırsa birinci Chern sınıfının yorumu aşağıdaki gibidir. M üzerinde demet yapan tam dizisi,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{e} \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0$$

şeklinde kohomolojide uzun tam dizisini oluşturur. Birinci homomorfizm,

$$c_1 : H^1(M,\mathcal{O}_M^*) \longrightarrow H^2(M,\mathbb{Z})$$

biçimindeki onun birinci Chern sınıfı için alınan bir doğru demeti dönüşümüdür. Burada M üzerinde holomorfik doğru demetinin izomorfizm sınıfının grubu ile birlikte $H^1(M,\mathcal{O}_M^*)$ tanımlanır. Bununla c_1,

$$c_1(L\otimes L') \simeq c_1(L) + c_1(L')$$

ve L^*, L nin duali olmak üzere

$$c_1(L^*) = -c_1(L')$$

ifadelerini sağlar (Faulk, 2016).

Şimdi Lemma 4.2.1. ($\partial\bar{\partial}$-lemma) nin $c_1(L)$ ile ilgili bir sonuç şöyledir:

Sonuç 4.4.1. Eğer η, $c_1(L)$ kohomoloji sınıfını gösteren bir reel $(1,1)$-formu ise L üzerinde h' metriği vardır öyle ki $2\pi\eta$, h' nün eğriliğidir (Faulk, 2016).

İspat: L üzerinde bir h metriği için $c_1(L)$,

$$\omega = \frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|s\|_h^2$$

şeklinde gösterilir. $\partial\bar{\partial}$-lemmadan $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon vardır öyle ki

$$\eta = \omega + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f$$

dir. h', $h' = e^{-2\pi f}\,h$ tarafından belirlensin. h' nün eğriliği

$$\begin{aligned}
-\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log\|s\|_{h'}^2 &= -\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log\|s\|_h^2 + 2\pi\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f \\
&= 2\pi\omega + 2\pi\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f \\
&= 2\pi\left(\omega + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f\right) \\
&= 2\pi\eta
\end{aligned}$$

elde edilir ■(Faulk, 2016).

Tanım 4.4.2. Eğer $c_1(L)$, pozitif $(1,1)$-formu ile gösterilirse $c_1(L)$ birinci Chern sınıfı pozitiftir denir (Faulk, 2016).

Lemma 4.4.1. L bir doğru demetidir ancak ve ancak $c_1(L)$, pozitiftir (Faulk, 2016).

İspat: Eğer L pozitif ise eğrilik formu pozitif olan L üzerinde bir h hermitian metrik vardır. Böylece $c_1(L)$, pozitif $(1,1)$-formu ile gösterilir (Faulk, 2016).

Aksine, eğer $c_1(L)$, pozitif $(1,1)$-formu ile gösterilirse eğriliği pozitif $(1,1)$- form olan L üzerinde bir h metriği vardır. Böylece L pozitiftir ■(Faulk, 2016).

Tanım 4.4.3. Bir kompleks manifold M için K_M kanonik demetine dual doğru demetine anti-kanonik demet denir ve K_M^{-1} şeklinde gösterilir. Ayrıca

$$c_1(M) = c_1\left(K_M^{-1}\right)$$

kuralı tarafından M nin birinci Chern sınıfı ile tanımlanır (Faulk, 2016).

4.5. Kovaryant Türev

(M, ω) bir Kahler manifoldu olmak üzere farklılaşan tensör alanları için ∇ şeklinde gösterilen Levi- Civita koneksiyonu kullanılır. Burada $\nabla g = \nabla \omega = \nabla J = 0$ durumu sağlanır. $z^1, \dots, z^n$ lokal holomorfik koordinatlar açısından farklı türevleri için

$$\nabla_i = \frac{\nabla \partial}{\partial z^i}, \quad \nabla_{\bar{\imath}} = \frac{\nabla \partial}{\partial \bar{z}^i}, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial z^i}, \qquad \partial_{\bar{\imath}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$$

eşitlikleri kullanılır. Koneksiyonu

$$\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k} = \sum_i \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial z^i}$$

tarafından verilen Γ_{jk}^i Christoffel sembolü ile belirlenir. Bu eşitlik aynı zamanda Kahler şartı

$$\nabla_{\bar{\imath}} \frac{\partial}{\partial z^k} = 0$$

olduğunu göstermek için kullanılabilir (Szekelyhidi, 2013).

Levi- Civita koneksiyonu simetriktir (serbest torsion). Bu nedenle $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ dir. Herhangi bir T tensörü için $\nabla_{\bar{\imath}} T = \overline{\nabla_{\imath} \overline{T}}$ dir. Tensör alanının kovaryant türevleri, fonksiyonlar üzerinde kovaryant türevler kısmi türevler aynı olduğundan türevler için çarpım kuralını kullanarak hesaplanabilir (Szekelyhidi, 2013).

Örnek 4.5.1. dz^k formunun kovaryant türevlerini bulmak için δ_j^k birim matris olmak üzere

$$dz^k\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = \delta_j^k$$

dır.

$$\left(\nabla_i\, dz^k\right)\frac{\partial}{\partial z^j} = -\Gamma_{ij}^k$$

hesaplamasından

$$\left(\nabla_i \, dz^k\right)\frac{\partial}{\partial z^j} + dz^k\left(\nabla_i \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\nabla_i \, dz^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = 0$$

bulunur. Böylece

$$\nabla_i \, dz^k = -\sum_j \Gamma_{ij}^k \, dz^j$$

elde edilir (Szekelyhidi, 2013).

Şimdi tekrarlı indeksler üzerinde toplama anlamına gelen toplama işlemini kullanarak her tekrarlı indeks en üstte ve en altta bir kez görünür. Genellikle $a_{i\bar{j}}$ için $a_{i\bar{j}} \, dz^i \otimes d\bar{z}^j$ $(i, j \text{ üzerinde toplama})$ şeklinde bir tensör yazılır. Fakat Γ_{jk}^i , koordinatların değişimi altında değişmediğinden bir tensör değildir (Szekelyhidi, 2013).

Örnek 4.5.2. Toplama kuralını kullanarak $a_{i\bar{j}} \, dz^i \otimes d\bar{z}^j$ tensörünün kovaryant türevi,

$$\nabla_{\bar{p}}\left(a_{i\bar{j}} \, dz^i \otimes d\bar{z}^j\right) = \left(\partial\bar{p} \, a_{i\bar{j}}\right) dz^i \otimes d\bar{z}^j + a_{i\bar{j}}\left(\nabla_{\bar{p}} \, dz^i\right) \otimes d\bar{z}^j + a_{i\bar{j}} \, dz^i \otimes \left(\nabla_{\bar{p}} d\bar{z}^j\right)$$

$$= \left(\partial\bar{p} \, a_{i\bar{j}}\right) dz^i \otimes d\bar{z}^j - a_{i\bar{j}} \, dz^i \otimes \left(\Gamma_{\bar{p}\ell}^{\bar{j}} \, d\bar{z}^\ell\right)$$

$$= \left(\partial\bar{p} \, a_{i\bar{j}} - \Gamma_{\bar{p}\bar{j}}^{\bar{\ell}} \, a_{i\bar{\ell}}\right) dz^i \otimes d\bar{z}^j$$

şeklinde hesaplanır ya da

$$\nabla_{\bar{p}} a_{i\bar{j}} = \partial\bar{p} \, a_{i\bar{j}} - \Gamma_{\bar{p}\bar{j}}^{\bar{\ell}} \, a_{i\bar{\ell}}$$

formülü kullanılır. Daha genel tensörler için benzer formüller kolaylıkla elde edilebilir (Szekelyhidi, 2013).

Lemma 4.5.1. $g_{j\bar{k}}$ metriği açısından Christoffel sembolü $g^{i\bar{\ell}}$, $g_{i\bar{\ell}}$ nün ters matrisi olmak üzere

$$\Gamma_{jk}^i = g^{i\bar{\ell}} \, \partial_i \, g_{k\bar{\ell}}$$

dir (Szekelyhidi, 2013).

İspat: Levi- Civita koneksiyonu, $\nabla_g = 0$ eşitliğini sağlar. Bu eşitlik koordinatlarda

$$0 = \nabla_j \, g_{k\bar{\ell}} = \partial_j \, g_{k\bar{\ell}} - \Gamma^p_{jk} \; g_{p\bar{\ell}}$$

anlamına gelir. Böylece

$$g^{i\bar{\ell}} \, \partial_j \, g_{k\bar{\ell}} = \Gamma^p_{jk} \; g_{p\bar{\ell}} \, g^{i\bar{\ell}} = \Gamma^p_{jk} \, \delta^i_p = \Gamma^i_{jk}$$

dir ■ (Szekelyhidi, 2013).

4.6. Eğrilikler

Kovaryant türevlerde genellikle değişme özelliği yoktur. Değişme özelliğinin olmaması eğrilik tarafından ölçülür. Eğriliği, örnek olarak $R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = g_{p\bar{j}} \, R^{\;p}_{i\;k\bar{\ell}}$ (indeksin durumu önemlidir) metriği kullanılan artacak veya daha azalacak olan $R^{\;j}_{i\;k\bar{\ell}}$ 4- tensörüdür (Szekelyhidi, 2013).

∇_k, ∇_ℓ ile, $\nabla_{\bar{k}}$, $\nabla_{\bar{\ell}}$ ile değişirken eğriliği

$$(\nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} - \nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k) \, \frac{\partial}{\partial z^i} = \; R^{\;j}_{i\;k\bar{\ell}} \, \frac{\partial}{\partial z^j}$$

tarafından tanımlanır. Christoffel sembolü açısından

$$R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = -\, \partial_k \, \partial_{\bar{\ell}} \, g_{i\bar{j}} + g^{p\bar{q}} \big(\partial_k \, g_{i\bar{j}}\big)\big(\partial_{\bar{\ell}} \, g_{p\bar{j}}\big)$$

metriğini bulunduğundan

$$R^{\;j}_{i\;k\bar{\ell}} = -\, \partial_{\bar{\ell}} \, \Gamma^j_{ki}$$

eşitliğini hesaplanabilir (Szekelyhidi, 2013).

Eğrilik çeşitli tanımları sağlar. Ricci eğriliği, daralması için

$$R_{i\bar{j}} = g^{k\bar{\ell}} \, R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}$$

ve skalar eğrilik

$$R = g^{i\bar{j}} \, R_{i\bar{j}}$$

olarak tanımlanır (Szekelyhidi, 2013).

Lemma 4.6.1. Lokal koordinatlarda Ricci eğriliği,

$$R_{i\bar{j}} = -\,\partial_i\,\partial_{\bar{j}} \log\det\left(g_{p\bar{q}}\right)$$

dir (Szekelyhidi, 2013).

İspat: Verilen lemmada eşit sağ tarafını ele alınırsa,

$$\begin{aligned} -\,\partial_i\,\partial_{\bar{j}} \log\det\left(g_{p\bar{q}}\right) &= -\,\partial_{\bar{j}}\left(g^{p\bar{q}}\,\partial_i\, g_{p\bar{q}}\right) \\ &= -\,\partial_{\bar{j}}\,\Gamma^{p}_{ip} \\ &= R^{p}_{p\, i\bar{j}} \\ &= R_{i\bar{j}} \end{aligned}$$

elde edilir ■(Szekelyhidi, 2013).

(M, g), n boyutlu bir Kahler manifold olsun. g, $T^{1,0}M$ holomorfik tanjant demeti üzerinde bir metrik olmak üzere $K_M^{-1} = \Lambda^n T^{1,0}M$ anti-kanonik demet üzerinde $\det(g)$ bir metrik olarak elde edilir (Faulk, 2016).

Tanım 4.6.1. (M, g) nin Ricci eğriliği, K_M^{-1} üzerinde $\det(g)$ nin eğriliğidir ve

$$\text{Ric}\ (g) = -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial} \log\det(g)$$

şeklinde ifade edilir (Faulk, 2016).

Başka bir deyişle Ric (ω) Ricci formu, lokal koordinatlarda kapalı reel $(1,1)$- form olan

$$\begin{aligned} \text{Ric}\ (\omega) &= \sqrt{-1}\, R_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j \\ &= -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial} \log\det(g) \end{aligned}$$

ile tanımlanır (Szekelyhidi, 2013).

Eğer M üzerinde ω Kahler formu verilirse g, uygun Kahler metriği olmak üzere Ric (g) gösterimi yerine Ric (ω) yazılabilir (Faulk, 2016).

Eğer h, M üzerinde başka bir Kahler metrik ise

$$\frac{\det(h)}{\det(g)}$$

genel olarak tanımlanan fonksiyondur. Böylece Ricci formlarının farkı

$$\mathrm{Ric}\,(h) - \mathrm{Ric}\,(g) = -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\frac{\det(h)}{\det(g)}$$

tam formudur. Buradan $[\mathrm{Ric}\,(g)]$ kohomoloji sınıfı, Kahler metrik seçiminden bağımsızdır. M nin birinci Chern sınıfı

$$c_1(M) = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Ric}\,(g)] \in H^2(M, \mathbb{R})$$

kohomoloji sınıfı olarak tanımlanır. $c_1(M)$ bu normalleştirme ile bir integral kohomoloji sınıfıdır (Szekelyhidi, 2013).

Kahler manifoldunun Ricci eğriliği hakkında temel sonucu Calabi varsayımının Yau çözümüdür (Szekelyhidi, 2013).

Teorem 4.6.1 (Calabi-Yau Teoremi). (M, ω) bir kompakt Kahler manifold ve α, $c_1(M)$ temsil eden bir reel $(1,1)$-formu olsun. $[\eta] = [\omega]$ ile birlikte M üzerinde bir tek η Kahler metriği vardır öyle ki

$$\mathrm{Ric}\,(\eta) = 2\pi\alpha$$

dır (Szekelyhidi, 2013).

Sonuç 4.6.1. Eğer özellikle $c_1(M) = 0$ ise her Kahler sınıfı, bir tek Ricci flat metrik içerir (Szekelyhidi, 2013).

Sıfır birinci Chern sınıfına sahip bir Kahler manifoldu, Calabi-Yau manifoldu olarak adlandırılır (Fine, 2012).

Teorem 4.6.2. M, k Gauss eğriliği ile birlikte kompakt bir Riemann yüzeyi ve ϕ hacim formu olmak üzere

$$\mathrm{Ric} = k.\phi$$

dir (Faulk, 2016).

İspat: Burada kullanacağımız metrik $h^2 dz \otimes d\bar{z}$ dir. Ricci eğriliğini hesaplanırsa

$$\mathrm{Ric} = -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log(h^2)$$

$$= -2\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log(\mathrm{h})$$

$$= -2\sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}\ \partial \bar{\mathrm{z}}}\log(\mathrm{h})\right)\mathrm{dz}\wedge \mathrm{d}\bar{\mathrm{z}}$$

$$= \left(\frac{-\Delta\log(\mathrm{h})}{\mathrm{h}^2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{-1}\mathrm{h}^2\mathrm{dz}\wedge \mathrm{d}\bar{\mathrm{z}}\right)$$

$$= \mathrm{k}.\phi$$

dir. Burada

$$\mathrm{k} = \frac{-\Delta\log(\ \mathrm{h})}{\mathrm{h}^2}$$

olağan Gauss eğriliğidir ve

$$\phi = \frac{1}{2!}\sqrt{-1}\mathrm{h}^2\mathrm{dz}\wedge \mathrm{d}\bar{\mathrm{z}}$$

ifadesi metriğe uygun hacim formudur ■ (Faulk, 2016).

Tanım 4.6.2. Eğer bir (M,ω) bir Kahler manifold, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$$

ise Kahler- Einstein'dır denilir ve buradaki λ sabitine de Einstein sabiti denir (Faulk, 2016).

Başka bir ifadeyle bir Kahler metriği Kahler Einstein metriğidir ancak ve ancak onun Ricci formu, Kahler metriğinin sabit bir çarpımıdır (Santoro, 2009).

Kompleks bir manifold üzerinde bir Kahler- Einstein metriği, bir Riemann metriğidir. Ayrıca bu metrik hem Kahler metriği hem de Einstein metriğidir.

Teorem 4.6.3. $(\mathbb{CP}^{\mathrm{n}},\omega_{\mathrm{FS}})$ Kahler manifoldu,

$$\mathrm{Ric}(\omega_{\mathrm{FS}}) = (\mathrm{n}+1)\omega_{\mathrm{FS}}$$

ile birlikte Kahler- Einstein'dır (Faulk, 2016).

İspat: U_0 koordinat haritasını verilsin. Fubini- Study formu,

$$\omega_{\mathrm{FS}}(\mathrm{z}^1,\dots,\mathrm{z}^{\mathrm{n}}) = \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log(1+|\mathrm{z}|^2)$$

$$= \sqrt{-1}\left(\frac{\sqrt{-1}\sum_j dz^j \wedge d\bar{z}^j}{1+|z|^2} - \frac{\left(\sum_j \bar{z}^j dz^j\right)\wedge\left(\sum_j z^j \bar{z}^j\right)}{(1+|z|^2)^2}\right)$$

lokal ifadesine sahiptir. U_0 üzerinde uyumlu g metriği,

$$g_{j\bar{k}} = \frac{\delta_{j\bar{k}}(1+|z|^2) - z^j\,\bar{z}^k}{(1+|z|^2)^2}$$

lokal ifadesine sahiptir. Buradaki $z^j\,\bar{z}^k$ ifadesi, onun izi $|z|^2$ tarafından verilen sıfır olmayan öz değerine sahip 1. mertebenin simetriğidir. Böylece koordinatların uygun bir lineer değişimi altında g'nin

$$g = \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\left((1+|z|^2)I_n - \mathrm{diag}(|z|^2, 0, \dots, 0)\right)$$

$$= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\,\mathrm{diag}\,(1, 1+|z|^2, \dots, 1+|z|^2)$$

lokal ifadesi elde edilir. $\det(g)$,

$$\det(g) = \frac{(1+|z|^2)^{n-1}}{(1+|z|^2)^{2n}} = \frac{1}{(1+|z|^2)^{n+1}}$$

şeklinde lokal ifadesidir. ω_{FS} nin Ricci formu,

$$\mathrm{Ric}(\omega_{FS}) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\det(g)$$

şeklinde lokal ifadeye sahiptir. Yukarıdaki $\det(g)$ nin ifadesini kullanarak $\mathrm{Ric}(\omega_{FS})$, U_0 da

$$\mathrm{Ric}(\omega_{FS}) = (n+1)\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log(1+|z|^2) = (n+1)\omega_{FS}$$

olarak lokal gösterime sahiptir. Benzer bir hesaplama, herhangi bir U_j koordinat haritasındaki

$$\mathrm{Ric}(\omega_{FS}) = (n+1)\omega_{FS}$$

eşitliğini gösterir ■(Faulk, 2016).

ω Kahler metriği ile verilen $\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$ ifadesinde λ nın işaret durumu önemlidir. Burada $\lambda = 1,\ \lambda = 0,\ \lambda = -1$ olmak üzere

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \omega, \qquad \mathrm{Ric}(\omega) = 0, \qquad \mathrm{Ric}(\omega) = -\omega$$

şeklinde 3 farklı durumu bulunur. Bir Kahler metriğinin Ricci formu, M üzerinde ω Kahler metriğinden bağımsız olduğu

$$c_1(M) = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Ric}(\omega)]$$

şeklinde birinci Chern sınıfı denilen bir karakteristik sınıfı tanımlar. λ nın işaret durumuna göre birinci Chern sınıfının işaret durumu belirlenir. Birinci Chern sınıfı λ ile aynı işaretlere sahiptir (Szekelyhidi, 2013).

M bir Kahler manifoldu ve M üzerinde bir Kahler- Einstein metriği bulmak için ya $c_1(M) < 0$ ya $c_1(M) = 0$ ya da $c_1(M) > 0$ olmalıdır (Szekelyhidi, 2013; Li vd., 2012).

Bu durumlar şöyle gösterilir:

1) $c_1(M) < 0$ için Aubin ve Yau birbirinden bağımsız olarak Kahler- Einstein metriğinin varlığını ispatlamışlardır (Moroianu, 2007).

$c_1(M) < 0$ durumu ile ilgili bazı teoremler:

Teorem 4.6.4 (Aubin- Yau Teoremi). $c_1(M) < 0$ sınıfına sahip kompakt bir Kahler manifoldu M, $\lambda = -1$ Einstein sabitine sahip tek bir Kahler Einstein metriği vardır (Moroianu, 2007).

Teorem 4.6.5. Negatif birinci Chern sınıfı ile birlikte kompakt bir Kahler manifoldu M olsun. $\omega \in -2\pi c_1(M)$ bir tek Kahler metrik vardır öyle ki $\mathrm{Ric}(\omega) = -\omega$ dır (Szekelyhidi, 2013).

Teorem 4.6.6. M, $c_1(M) < 0$ sınıfı ile birlikte bir kompakt Kahler manifoldu ise negatif skalar eğriliğe sahip bir Kahler- Einstein metrik vardır. Bu metrik ölçeklemeye kadar tektir (Santoro, 2009).

2) $c_1(M) > 0$ için herhangi bir Kahler sınıfındaki Kahler- Einstein metriğinin varlığını ispatlamaya çalışan Calabi' nin varsayımı, Yau tarafından çözüldü (Tian, 2000; Li vd., 2012).

Tanım 4.6.7. Pozitif birinci Chern sınıfına sahip Kahler manifoldu Fano manifoldu olarak adlandırılır (Wang ve Zhu, 2004).

Fano manifoldları üzerinde genellikle Kahler- Einstein metrikleri var olmazlar. Bunun nedeni Futaki invaryantıdır (Spotti, 2016).

3) $c_1(M) = 0$ için $Ric(\omega) = 0$ dır. Bu durumda Kahler- Einstein metrikleri bulunabilir (Li, 2012).

Tanım 4.6.3. Sıfır Ricci eğriliğine sahip Kahler- Einstein metrikleri Calabi- Yau metrikleri olarak adlandırılır (Li, 2012).

Calabi- Yau metrikleri sicim kuramında büyük rol oynar (Li, 2012).

5. POZİTİF BİRİNCİ CHERN SINIFI

Birinci Chern sınıflarının negatif ve sıfır oluğu durumda Kahler-Einstein metriğin bulunabildiğini önceki bölümde belirtilmiştir. Fakat birinci Chern sınıfı pozitif olduğunda Kahler- Einstein metrik bulunabilmesi için gerekli sınırlandırmalardan bahsedecektir.

Bu bölümde holomorfik vektör alanı terimini, $L_\nu J = 0$ için TM tanjant demetin bir kesiti anlamında kullanılmaktadır. Bu şekilde verilen bir vektör alanı, genel anlamda $\nu^{(1,0)}$, $T^{1,0}M$ nin holomorfik kesitidir. Benzer şekilde verilen $T^{1,0}M$ nin bir holomorfik kesiti, onun reel kısmı ν, $L_\nu J = 0$ özelliğine sahiptir (Fine, 2012).

Teorem 5.1. Pozitif birinci Chern sınıfına sahip herhangi M kompakt Kahler manifoldu için otomorfizmlerine kadar

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$$

sağlayan en çok bir metrik vardır (Bando ve Mabuchi, 1987).

Tanım 5.1. M kompakt bir Kahler manifold ve $\eta(M)$, M nin holomorfik vektör alanlarının uzayı olsun. ω, $[\omega] = \Omega$ ya sahip bir Kahler metriği olmak üzere herhangi bir Kahler sınıfı Ω ve $\nu \in \eta(M)$ için Futaki invaryantı,

$$f_{M,\Omega}\colon \eta(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\nu \longmapsto f_{M,\Omega}(\nu) = \int_M \nu(h)\,\omega^n$$

ile tanımlanan $\eta(M)$ nin bir $f_{M,\Omega}$ karakteridir (Tian, 2014).

$s(\omega)$, ω nın skalar eğriliği ve μ de skalar eğriliğin

$$\mu = \frac{c_1(M).\Omega^{n-1}([M])}{\Omega([M])}$$

şeklindeki ortalaması olmak üzere h,

$$s(\omega) - \mu = \Delta_\omega$$

ile belirtilir ve buradan

$$\int_M \left(e^h - 1\right)\omega^n = 0$$

dir (Tian, 2014).

Sonuç 5.1. M, sabit skalar eğriliğe ve $[\omega] = \Omega$ ya sahip bir Kahler metriği kabul ederse $f_{M,\Omega} \equiv 0$ dır (Tian, 2014).

Teorem 5.2. $f_{M,\Omega}$ Futaki invaryantı, ω nın seçimine bağlı değildir (Fine, 2012).

Lemma 5.1. Eğer $\vartheta, \nu \in \eta(M)$ ise $f_{M,\Omega}([\vartheta, \nu]) = 0$ dır. Başka bir deyişle $f_{M,\Omega}$, $\eta(M)$ nin bir karakteridir (Fine, 2012).

Eğer M bir Fano manifold ise $\Omega = 2\pi c_1(M)$ ve kolaylık olması açısından $f_{M,\Omega}$ yerine f_M yazılabilir. Sadece Futaki invaryantı $f_M \equiv 0$ ise M bir Kahler-Einstein metriğine sahiptir. Futaki invaryantı sıfır olmayan Fano manifoldu örnekleri vardır ve bunlar Kahler-Einstein metriği kabul etmezler (Tian, 2014).

Teorem 5.3. $c_1(M) > 0$ a sahip bir kompleks M yüzeyi bir Kahler-Einstein metriğine sahiptir ancak ve ancak M nin Futaki invaryantı sıfırdır (Tian, 1990).

Tanım 5.2. M, $n -$ boyutlu kompakt kompleks manifold olsun. $\mathrm{Oto}(M)$ kompleks Lie grubu, M nin tüm biholomorfik otomorfizlerinden oluşur. Onun Lie cebiri olan $\eta(M)$, M üzerindeki tüm holomorfik vektör alanlarından oluşur (Tsuboi, 2009).

Eğer $\eta(M)$, $\mathrm{Oto}(M)$ nin kompakt alt grubunun Lie cebirinin kompleksleşmişi ise $\eta(M)$ redüktiftir (Tsuboi, 2009).

Teorem 5.4. M, bir Kahler-Einstein metriğine sahiptir ancak ve ancak M üzerinde holomorfik vektör alanının Lie cebiri, redüktif (bir kompakt reel alt cebirin kompleksleşmişi) tir (Tian, 1990, 2014).

Örnek olarak $c_1(M) > 0$ a sahip 3- boyutlu M Kahler manifoldunda $\eta(M)$ redüktiftir ve $f_M \neq 0$ dır. Bu durumda M, herhangi bir Kahler-Einstein metriğini kabul etmez (Tian, 1991).

Teorem 5.5. M, $\eta(M) = \{0\}$ a sahip ve Kahler-Einstein metrik kabul eden bir Fano manifold ise M, K-kararlıdır (Tian, 1997, 2014).

Sabit skalar eğrilikli Kahler metriği, skalar eğriliği sabit olan bir kompleks manifold üzerinde bir Kahler metriktir. Özel bir durumu, Kahler-Einstein metrikleri ve daha genel durumu ise extremal Kahler metrikleridir.

Teorem 5.6. Eğer M, sabit skalar eğriliğe sahip bir Kahler-Einstein metriğe sahip ise $\eta(M)$, reductivedir (Matsushima, 1957).

Teorem 5.7. Eğer M, sabit skalar eğrilikli Kahler-Einstein metriğe sahip ise $f_M \equiv 0$ dır (Futaki, 1983).

Teorem 5.8. M, $[\omega] = 2\pi c_1(L)$ iken sabit skalar eğrilikli bir ω Kahler metriği ve $\eta(M) = \{0\}$ eşitliği var ise (M, L), K-kararlıdır (Stoppa, 2009; Tian, 2014).

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1) Çalışma hakkında genel bilgi verildi.

2) Çalışmanın oluşturulmasında gerekli ön bilgi verildi.

3) Reel ve kompleks demetler ifade edilip bu demetlere göre karakteristik sınıfların oluştuğu gösterildi.

4) Karakteristik sınıflardan biri olan Chern sınıfı ifade edilip birinci Chern sınıfına değinildi.

5) Birinci Chern sınıfının işaret durumları incelendi.

6) Chern sınıfının negatif ve sıfır olması durumu ele alınıp Kahler-Einstein metrik bulunabildiği gösterildi.

7) Chern sınıfının pozitif olduğu durumda Kahler-Einstein metriğin bulunması için sınırlandırılmalardan bahsedildi ve bu sınırlandırmalardan biri olan Futaki invaryantı tanıtıldı.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ballmann, W., (2002), Lectures on Differential Geometry, A short and elementary exposition of vector bundles and connections on vector bundles, University of Bonn, Germany.

Bando, S., Mabuchi, T., (1987), Uniqueness of Einstein Kahler metrics modulo connected group actions, Algebraic Geometry, Adv. Studies in Pure Math., 10.

Cohen,R.l., (1998), The Topology of Fiber Bundles Lecture Notes, Stanford University, Dept. of Mathematics,Stanford, California.

Davis, J.F., Kirk, P., (1991), Lecture Notes in Algebraic Topology, 1991 Mathematics Subject Classification. 55-XX., Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington.

Davis, J., (2013), Differential Topology, Fall 2013, Vector bundles, Indiana University.

Fine, J., (2012), A rapid introduction to Kähler geometry, Chapter 2: Holomorphic line bundles, preprints, Université Libre de Bruxelles, Belgique.

Faulk, M., (2016), First Chern Classes of Kahler Manifolds, Columbia University, New York.

Futaki, A., (1983), An obstruction to the existence of Kahler-Einstein metrics, Inv. Math., 73, 437-443.

Graumann, B., (2014), Universal Vector Bundles, Humboldt-Universität zu Berlin Institut für Mathematik, Summer Term 2012, Germany, Berlin.

Hacısalihoğlu, H.H., (1980), Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul.

Hacısalihoğlu, H.H., (1985), Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H., (1993), Diferansiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Hatcher, A., (2002), Algebraic Topology, Cambridge University Press, England.

http://toperkin.mysite.syr.edu/talks/vector_bundles_connections_curvature.pdf

Kobayashi, S., (1987), Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Mathematical Society of Japan, Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press.

Kocaayan, H., (2012), Karakteristik Sınıfları, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Lawson,J., (2006), Course Syllabi: Differential Geometry (Spring, 2006), Chapter 7:Vector bundles, https://www.math.lsu.edu/~lawson/Chapter7.pdf

Li, C., (2012), Kahler-Einstein Metrics and K-Stability, PhD thesis, Princeton University.

Luke, G., Mishchenko, A., (1998), Vector Bundles And Their Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Matsushima, Y., (1957), Sur la structure du group homeomorphismes analytiques d'une certain variete, Kaehlerienne, Nagoya Math. J., 11, 145-150.

Mclean, M., (2016), Teaching at Stony Brook: Differential Topology (MAT 566), Lecture4: Grassmann Bundles, Stony Brook University Mathematics Department (College of Arts and Sciences) and Institute for Mathematical Sciences, USA.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Milnor, J.W., (1974), Characteristic Classes, Princeton University Press, ABD.

Moroianu, A., (2004), Lectures on Kahler Geometry, cours donné en l'Université de Hambourg, Allemagne.

Moroianu, A., (2007), Lectures on Kahler Geometry, Cambridge University Press, Paris.

Ozan, Y., (2016), Türevlenebilir Manifoldlara Giriş, ODTÜ, Ankara.

Pragacz, P., (2012), Characteristic Classes with Applications yo Geometry, Topology and Number Theory, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Poland.

Quick, G., (2014), Spring 2014: Advanced Algebraic Topology (Math 231br), Lecture 16: Chern classes for complex vector bundles, Harvard University, Massachusetts Hall, Cambridge.

Quick, G., (2016), Spring 2014: Advanced Algebraic Topology (Math 231br), Lecture 11: The Grassmannian manifold and the universal bundle, Harvard University, Massachusetts Hall, Cambridge.

Sağlamer, A.F., (1995), Değme Manifoldları, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.

Santoro, B., (2009), Introduction to Evolution Equations in Geometry, Nacional de Matematica Pura e Aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, Brazil.

Spotti, C., (2016), Compact moduli spaces of Kahler-Einstein Fano varieties, Cambridge of University, England.

Stoppa, J., (2009), K-stability of constant scalar curvature Kahler manifolds. Adv. n Math., 221, 1397-1408.

Szekelyhidi, G., (2013), Introduction to Extremal metrics Preliminary Version,

Tajakka, T., (2015), Cohomology of The Grassmannian, Aalto University, School of Science, Degree Programme in Engineering Physics and Mathem atics, Finland.

Tian, G., (1990), Kahler-Einstein on algebraic manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II ,587598, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

Tian, G., (1991), Lectures on Einstein Manifolds: Kahler-Einstein Manifolds and Positive Scalar Curvature, Mathematics Subject Classification. Primary 53C20, İnternational Press.

Tian, G., (1997), Kahler-Einstein metrics with positive scalar curvature. Invent. Math., 130, 1-39.

Tian, G., (2000), Kahler-Einstein Manifolds of Positive Scalar Curvature, İnternational Press.

Tian, G., (2014), Kahler-Einstein metrics on Fano manifolds, preprint,

Tsuboi, K., (2009), On the existence of Kahler metrics of constant scalar curvature,

Wang, X.J., Zhu, X., (2004), Kahler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class, Advances in Mathematics 188,87-103.

Wendl, C., (2008), Lectures Notes on Bundles and Connections, Chapter 2: Bundles, preprints,

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Yano, K., Kon, M., (1984), Structures on Manifolds, World Scientific Publishing Co Pte Ltd., Singapore.

Zinger, A., (2010), Spring 2010, MAT531: Topology & Geometry, II, Notes on Vector Bundles, Stony Brook University Mathematics Department (College of Arts and Sciences) and Institute for Mathematical Sciences, USA.